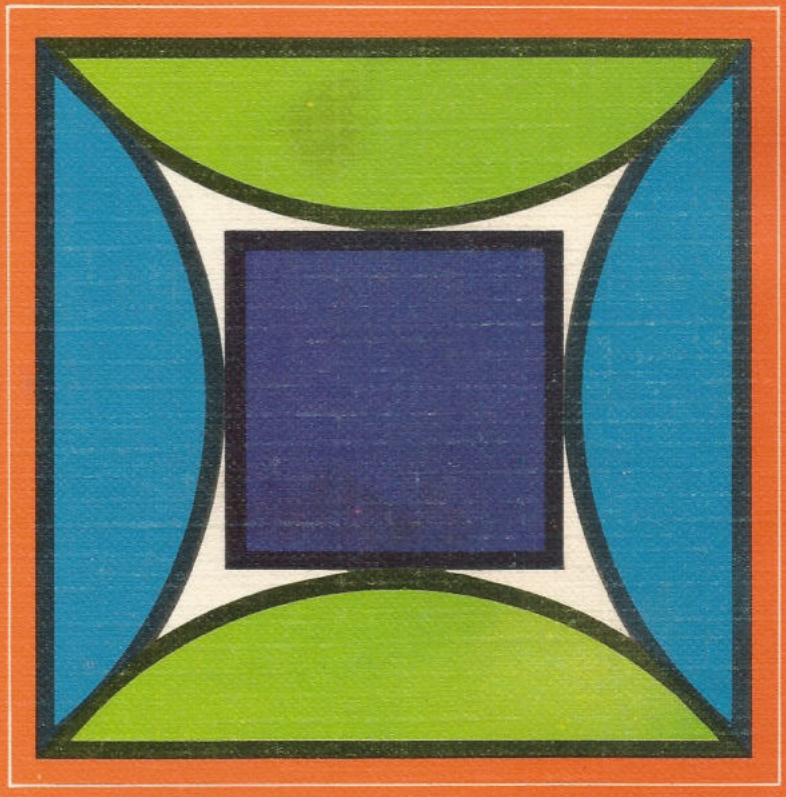
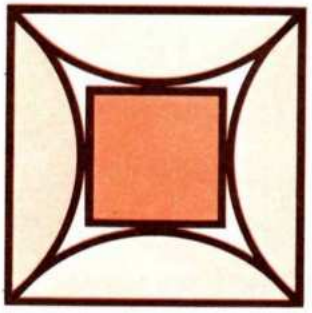
matemática 3

BACHILLERATO



Educación Santillana

matemática



matemática

Educación Santillana

3

BACHILLERATO

La creación de **Matemática** ha sido realizada
en el Departamento
de Investigaciones Educativas de SANTILLANA por:

José Caruncho.
(Doctor en Matemáticas. Prof. de la Universidad Autónoma de Madrid.)

Carmen Vázquez.
(Lic. en Matemáticas. Prof. de la Universidad Autónoma de Madrid.)

Miguel Rivera.
(Catedrático de Matemáticas del Instituto Nacional de Bachillerato de Sestao. Vizcaya)

Dirección científica:
José Antonio Fernández Viña.
(Catedrático de Matemáticas Generales de la Universidad Autónoma de Madrid.)

Dirección editorial:
José Gil Martos
(Prof. de Matemáticas)

La realización gráfica y editorial del libro MATEMATICA ha sido efectuada en el equipo de Ediciones Santillana por los siguientes especialistas, bajo la dirección técnica de Francisco Romero: *Cubierta:* Luis Elvira. *Confección y montaje:* José García. Corrector: Eugenio Miguel. *Ilustraciones:* José María Valera. *Coordinación técnica:* Brígido Romero. *Coordinación artística:* Pedro García.

PROLOGO

Este libro de Matemática, correspondiente al tercer curso de Bachillerato, se ha escrito manteniendo la misma estructura y el mismo plan fundamental de primero y segundo.

Aunque aquí se profundizan las nociones de Análisis y Estadística, estudiadas en primero y segundo, hay cuestiones tales como la Regla de la cadena, la derivada de la función recíproca, la distribución normal y el concepto de integral definida de una función continua cuya demostración rigurosa cae fuera del nivel de este curso, razón por la que hemos creído más conveniente limitarnos a dar una justificación informal de estas cuestiones, centrando la atención en la aplicación práctica de las mismas.

Al igual que en los dos cursos anteriores, este libro se puede adaptar a distintos niveles; el profesor puede omitir algunas demostraciones o, por el contrario, proponer actividades de ampliación según el grado de madurez de sus alumnos.

Los contenidos del programa oficial se han desarrollado en siete Unidades, cada una de las cuales, que va precedida de una introducción, consta de varios temas.

Los dos primeros libros de esta serie los iniciábamos con una Unidad de preliminares en la que se actualizaban y precisaban conocimientos que el alumno debió adquirir en E.G.B.; en éste no se incluye dicha Unidad, porque las cuestiones tratadas se apoyan en los cursos anteriores de bachillerato.

Con el fin de facilitar el aprendizaje y la utilización correcta de las nociones matemáticas, aparecen en el libro tres tipos de ejercicios:

a) Ejercicios propuestos al margen derecho de las páginas. Son muy sencillos y contribuyen a consolidar los conceptos inmediatamente después de ser introducidos.

b) Ejercicios al final de cada tema. Algunos de estos ejercicios son análogos a los propuestos a lo largo del tema, por lo que pueden ser utilizados para controles y recuperaciones, y otros se refieren al tema de un modo global y tienen un carácter distinto a los anteriores.

c) Ejercicios al final del libro. Sirven de complemento y ampliación a los tópicos tratados en las Unidades y pueden ayudar a atender las diferencias individuales; por ello, el uso que se haga de esta parte queda a criterio del profesor.

INDICE

PROLOGO 5

UNIDAD 1. – PRODUCTO ESCALAR 9

TEMA 1. – **El plano afín euclídeo** 10

1. Angulo formado por dos vectores libres 10
2. Producto escalar en $(V^2, +, \cdot R)$ 11
3. Propiedades del producto escalar 12
4. Plano vectorial euclídeo 17
5. Plano afín euclídeo 17
6. Algunas aplicaciones del producto escalar 18
7. Distancia en el plano afín euclídeo 19

Ejercicios y cuestiones 21

TEMA 2. – **Ortogonalidad** 22

1. Vectores ortogonales 22
2. Bases ortogonales y ortonormales 25
3. Expresión analítica del producto escalar 26
4. Expresión analítica de la distancia entre dos puntos 28

Ejercicios y cuestiones 29

TEMA 3. – **Formas lineales y bilineales** 30

1. Formas lineales sobre un espacio vectorial de dimensión dos 30
2. Formas bilineales sobre un espacio vectorial de dimensión dos 32
3. Definición de producto escalar en un espacio vectorial real de dimensión dos 34

Ejercicios y cuestiones 36

UNIDAD 2. – TRIGONOMETRIA 38

TEMA 4. – **Teoremas fundamentales de adición de ángulos** 39

1. Reducción al primer cuadrante 39
2. Teoremas de adición de ángulos 42
3. Fórmulas del ángulo doble 47
4. Fórmulas del ángulo mitad 49
5. Transformación de sumas en productos 49
6. Ecuaciones trigonométricas 52

Ejercicios y cuestiones 53

TEMA 5. – **Resolución de triángulos y aplicaciones** 54

1. Relaciones entre los elementos de un triángulo 54
2. Resolución de triángulos 58
3. Aplicaciones prácticas de las relaciones entre los elementos de un triángulo 61

Ejercicios y cuestiones 65

UNIDAD 3. – GEOMETRIA EUCLIDEA DEL PLANO 67

TEMA 6. – **Cambios de sistemas de referencia en el plano** 68

1. Cambio de base en espacios vectoriales de dimensión dos 68
2. Coordenadas cartesianas rectangulares 70
3. Traslación 71
4. Traslación de ejes 73
5. Giro de ejes 74

Ejercicios y cuestiones 76

TEMA 7. – **La recta en el plano. Condiciones de ortogonalidad** 77

1. Ecuaciones de la recta 77
2. Condición de perpendicularidad 80
3. Distancia de un punto a una recta 81
4. Ecuación normal de la recta 83

Ejercicios y cuestiones 86

TEMA 8. – **Angulo formado por dos rectas. Bisectrices** 87

1. Lugares geométricos 87
2. Angulo formado por dos rectas 88
3. Bisectrices 90

Ejercicios y cuestiones 92

TEMA 9. – **Circunferencia y elipse** 93

1. Ecuación de la circunferencia 93
2. Determinación de la circunferencia 96
3. Reducción de la ecuación de una circunferencia 97
4. Intersección con una recta 98

5. Potencia de un punto 98
6. Eje radical y centro radical 100
7. Elipse y sus elementos 103
8. Ecuación de la elipse 104

Ejercicios y cuestiones 108

TEMA 10. – **Hipérbola y parábola** 109

1. Hipérbola y sus elementos 109
2. Ecuación de la hipérbola 110
3. Asíntotas de la hipérbola 112
4. Hipérbola equilátera: ecuación referida a sus asíntotas 113
5. Otras ecuaciones de la hipérbola 115
6. Parábola y sus elementos 117
7. Ecuaciones de la parábola 117
8. Propiedades comunes a las tres cónicas 121

Ejercicios y cuestiones 123

UNIDAD 4. – LOS NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR 125

TEMA 11. – **Forma polar de un número complejo** . 126

1. Módulo de un número complejo 126
2. Propiedades del módulo de un número complejo 127
3. Coordenadas polares en el plano euclídeo 127
4. Paso de coordenadas cartesianas a polares y de polares a cartesianas 128
5. Formas polar y trigonométrica de un número complejo 130
6. Igualdad de números complejos en forma polar 131

Ejercicios y cuestiones 132

TEMA 12. – **Operaciones con números complejos en forma polar** 133

1. Producto de números complejos 133
2. Cociente de números complejos 134
3. Potencia de un número complejo 134
4. Raíces *n*-ésimas de un número complejo 136

Ejercicios y cuestiones 139

UNIDAD 5. – CALCULO DIFERENCIAL 141

TEMA 13. – **El concepto de derivada. Cálculo con derivadas** 142

1. El problema de la tangente a una curva en uno de sus puntos 142
2. El concepto de derivada 144
3. Funciones no derivables 145
4. Función derivada 147
5. Algunos ejemplos de funciones derivables ... 149
6. Diferencial de una aplicación 150
7. Derivadas sucesivas 151
8. Derivada de una suma de funciones 152
9. Derivada del producto de una función por un número real 152
10. Derivada de la función polinómica 153
11. Derivada de un producto de funciones 154
12. Derivada de un cociente de funciones 156
13. Derivada de una composición de funciones: Regla de la cadena 159
14. Derivada de la función recíproca 160

Ejercicios y cuestiones 163

TEMA 14. – **Derivada de las funciones elementales** 164

1. Derivada de la función potencial de exponente negativo 164
2. Derivada de la función logarítmica 165
3. La derivación logarítmica 167
4. Derivada de la función exponencial 169
5. Derivada de las funciones trigonométricas. 170
6. Derivada de las funciones trigonométricas recíprocas 175

Ejercicios y cuestiones 178

TEMA 15. – **Estudio local de las funciones derivables** 179

1. Crecimiento y decrecimiento de una función .. 179
2. Máximos y mínimos de una función 183
3. Problemas relativos a máximos y mínimos 187
4. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión . 190

Ejercicios y cuestiones 192

TEMA 16. – **Representación gráfica de funciones** . 193

1. Intervalos de existencia y regiones 193
2. Cortes a los ejes 194
3. Intervalos de crecimiento. Máximos y mínimos 195
4. Intervalos de concavidad 196
5. Reducción del dominio de una función 198
6. Asíntotas 199
7. Regiones 201
8. Representación gráfica de una función 202

Ejercicios y cuestiones 208

TEMA 17. – **Aplicación de las derivadas a la determinación de tangentes** 209

1. Ecuación de la tangente a una curva 209
2. Ecuación de la tangente a una circunferencia en uno de sus puntos 210
3. Ecuación de las tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a ella 211
4. Ecuación de la tangente a la elipse y a la hipérbola 212
5. Ecuación de la tangente a la parábola 214

Ejercicios y cuestiones 215

UNIDAD 6. – CALCULO INTEGRAL 217

TEMA 18. – **Funciones primitivas: integral indefinida** 218

1. Primitivas de una función 218
2. Primitivas de una suma de funciones 220
3. Primitivas de una función por un número real 220
4. Primitivas de las funciones más usuales 221
5. Integración por cambio de variable 222
6. Integración por partes 225
7. Integración de funciones racionales sencillas . 226

Ejercicios y cuestiones 230

TEMA 19. – **Funciones escalonadas** 231

1. Particiones de un intervalo $[a, b]$ 231
2. Funciones escalonadas 232
3. Operaciones con funciones escalonadas 235
4. El espacio vectorial $\mathscr{E}([a, b])$ 240
5. Valor absoluto de una función escalonada 240

Ejercicios y cuestiones 241

TEMA 20. – **Integral definida** 242

1. Integral de una función escalonada 242
2. Propiedades de la integral de funciones escalonadas 245
3. Aproximación de una función continua mediante funciones escalonadas 253
4. Integral de una función continua en un intervalo cerrado 254
5. Propiedades de la integral de una función continua 256

Ejercicios y cuestiones 258

TEMA 21. – **El teorema fundamental del cálculo integral** 259

1. Función integral asociada a una función escalonada 259
2. Función integral asociada a una función continua 262
3. Regla de Barrow 264

Ejercicios y cuestiones 266

TEMA 22. – **Aplicaciones de la integral definida** .. 267

1. Areas de recintos planos 267
2. Volúmenes de sólidos de revolución determinados por funciones escalonadas 274
3. Volúmenes de sólidos de revolución determinados por funciones continuas 276
4. Trabajo de una fuerza 278

Ejercicios y cuestiones 280

UNIDAD 7. – ESTADISTICA 282

TEMA 23. – **Variables aleatorias: Funciones de distribución** 283

1. Nociones previas 283
2. Variables aleatorias 285
3. Funciones de probabilidad de una variable aleatoria discreta 287
4. Esperanza y varianza de una variable aleatoria discreta 290
5. Función de distribución de una variable aleatoria discreta 293
6. Distribuciones continuas 296

Ejercicios y cuestiones 299

TEMA 24. – **Distribuciones binomial y normal** 300

1. Experimentos de Bernouilli 300
2. Distribución binomial o de Bernouilli 302
3. Distribución normal 307

Ejercicios y cuestiones 312

TEMA 25. – **Distribuciones bidimensionales** 313

1. Procesos doblemente aleatorios 313
2. Funciones bivariables discretas de probabilidad 315
3. Regresión lineal 316
4. Recta de regresión de mínimos cuadrados 317
5. Correlación lineal 327
6. Coeficiente de correlación lineal 328

Ejercicios y cuestiones 331

Complementos y ampliación 333

TABLAS 345

Unidad 1

PRODUCTO ESCALAR

En el curso anterior hemos estudiado la estructura de espacio vectorial real y en particular el espacio vectorial de los vectores libres del plano $(V^2, +, \cdot \mathbb{R})$. Es en este espacio vectorial en donde vamos a asociar a todo par de vectores un número real que llamaremos *producto escalar* de ambos vectores. El estudio de las propiedades de este producto escalar nos permitirá su generalización a un espacio vectorial cualquiera $(\mathbf{V}, +, \cdot \mathbb{R})$ de dimensión dos.

Veremos que, en general, el producto escalar sobre un espacio vectorial $\mathbf{V}$ se define como una aplicación $f: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica unas ciertas condiciones.

Por otra parte, el producto escalar en el espacio vectorial V^2 nos llevará a introducir las nociones de ortogonalidad y de distancia en el plano afín asociado $\mathscr{E}_2$. Estas nociones servirán de base para abordar cuestiones tales como la ecuación normal de la recta, distancia de un punto a una recta... y para tratar problemas de lugares geométricos en el plano.

Tema 1

1. Angulo formado por dos vectores libres.
2. Producto escalar en $(V^2, +, \cdot \mathbb{R})$.
3. Propiedades del producto escalar.
4. Plano vectorial euclídeo.
5. Plano afín euclídeo.
6. Algunas aplicaciones del producto escalar.
7. Distancia en el plano afín euclídeo.

Tema 2

1. Vectores ortogonales.
2. Bases ortogonales y ortonormales.
3. Expresión analítica del producto escalar.
4. Expresión analítica de la distancia entre dos puntos.

Tema 3

1. Formas lineales sobre un espacio vectorial de dimensión dos.
2. Formas bilineales sobre un espacio vectorial de dimensión dos.
3. Definición de producto escalar en un espacio vectorial real de dimensión dos.

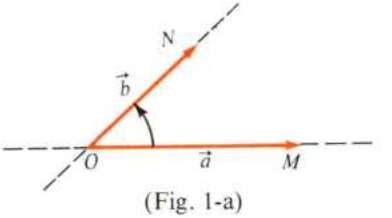
Tema 1 EL PLANO AFIN EUCLIDEO

En este tema se va a estudiar el producto escalar en el espacio vectorial de los vectores libres del plano ($\mathbf{V}^2$, $+$, $\cdot\mathbb{R}$), *que frecuentemente representamos simplemente por* $\mathbf{V}^2$.

Este producto escalar, que definiremos de la forma habitual, nos permitirá, por una parte, abordar algunas propiedades geométricas, y por otra, determinar la distancia entre dos puntos del plano afín.

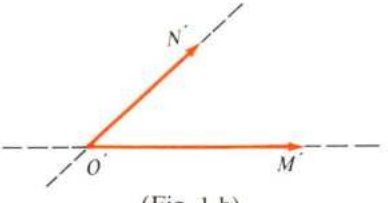
1 Angulo formado por dos vectores libres

1.1. Consideremos el espacio vectorial de los vectores libres del plano $\mathbf{V}^2$, y sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores libres no nulos y O un punto del plano. Llamemos M y N a los puntos del plano tales que $\overrightarrow{OM}$ sea un representante de $\vec{a}$ y $\overrightarrow{ON}$ un representante de $\vec{b}$ (Fig. 1a). El ángulo MON es el ángulo formado por el vector libre $\vec{a}$ y el vector libre $\vec{b}$.



(Fig. 1-a)

1.2. El ángulo formado por dos vectores libres no nulos no depende del punto O elegido. En efecto: sea O' otro punto cualquiera del plano; se trata de ver que el ángulo determinado ahora es igual al de antes. Sean M' y N' puntos tales que $\overrightarrow{O'M'}$ sea equipolente a $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{O'N'}$ sea equipolente a $\overrightarrow{ON}$ (Fig. 1-b). Las rectas OM y $O'M'$ son paralelas y análogamente las rectas ON y $O'N'$.



(Fig. 1-b)

En consecuencia, los ángulos MON y $M'O'N'$ son iguales.

1.3. El ángulo formado por el vector libre $\vec{a}$ y el vector libre $\vec{b}$ lo designaremos por $(\vec{a}, \vec{b})$.

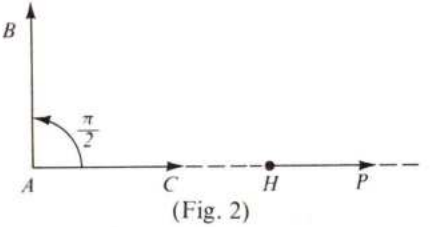
Nota: El ángulo formado por el vector libre $\vec{0}$ y un vector libre arbitrario $\vec{x}$ no está definido.

Ejemplos:

- Si designamos por $[\overrightarrow{AC}]$ y $[\overrightarrow{AB}]$ los vectores libres cuyos representantes son, respectivamente, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ de la figura 2, se tiene:

  $\left([\overrightarrow{AC}], [\overrightarrow{AB}]\right) = \frac{\pi}{2}$

  Análogamente, $\left([\overrightarrow{AC}], [\overrightarrow{HP}]\right) = 0$ y $\left([\overrightarrow{HP}], [\overrightarrow{AB}]\right) = \frac{\pi}{2}$

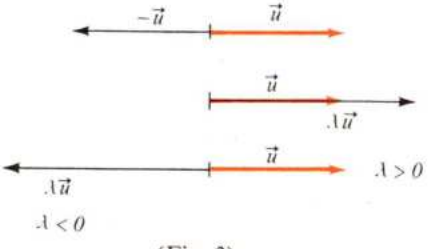


(Fig. 2)

- Sea $\vec{u}$ un vector no nulo de $\mathbf{V}^2$ (Fig. 3); entonces

  $(\vec{u}, -\vec{u}) = \pi$, $(\vec{u}, \lambda\vec{u}) = 0$ si $\lambda > 0$

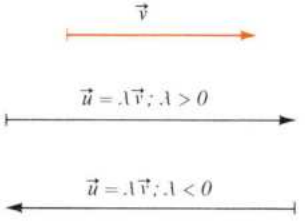
  y $(\vec{u}, \lambda\vec{u}) = \pi$ si $\lambda < 0$



(Fig. 3)

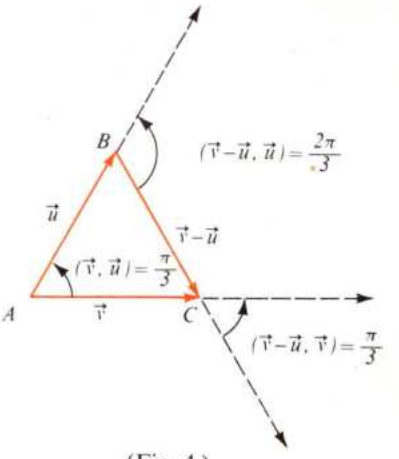
- En el triángulo equilátero de la figura 4, si llamamos $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}]$ y $\vec{v} = [\overrightarrow{AC}]$, entonces $[\overrightarrow{BC}] = \vec{v} - \vec{u}$;
$(\vec{v}, \vec{u}) = \frac{\pi}{3}$; $(\vec{v} - \vec{u}, \vec{u}) = \frac{2\pi}{3}$; $(\vec{v} - \vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$

- Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no nulos y linealmente dependientes; sabemos entonces que $\vec{u}$ es de la forma $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, lo que significa que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección (Fig. 5).



(Fig. 5)

Si $\lambda > 0$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen además el mismo sentido, luego $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. Si $\lambda < 0$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen sentido distinto, lo que hace que $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.



(Fig. 4)

Ejercicios:

1. Sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dos vectores libres no nulos y de igual dirección. Razona cuál puede ser el valor del ángulo $(\vec{x}, \vec{y})$.

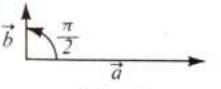
2 Producto escalar en $(V^2, +, \cdot\mathbb{R})$

2.1. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores libres del plano; *se llama producto escalar de $\vec{a}$ por $\vec{b}$, y se designa por $\vec{a} \cdot \vec{b}$, al número real igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forma el vector $\vec{a}$ y el vector $\vec{b}$ si ambos son no nulos, o igual a cero si al menos uno de ellos es el vector nulo.* Es decir:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) & \text{si } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ y } \vec{b} \neq \vec{0} \\ 0 \text{ si } \vec{a} = \vec{0} \text{ o } \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$$

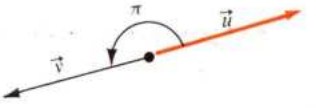
Ejemplos:

- Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores libres tales que $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ (Fig. 6); entonces $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot 0 = 0$



(Fig. 6)

- Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores libres no nulos de igual módulo m, de igual dirección y de sentido distinto (Fig. 7); entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \pi = m\, m(-1) = -m^2$.



(Fig. 7)

- Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores no nulos y $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, se tiene:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, es decir, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.

2. Los módulos de dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son respectivamente 7 y 8. Calcula el producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ cuando

a) $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{3}{8}$; b) $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$

3. Calcula el producto escalar $\vec{x} \cdot \vec{y}$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $\vec{x} = \vec{0}$

b) $|\vec{y}| = 0$

c) $|\vec{x}| = |\vec{y}| = 2$, $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$

2.2. Para todo vector libre $\vec{a}$, convendremos en designar por $(\vec{a})^2$ el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{a}$. A este producto se le llama norma del vector $\vec{a}$. Según esto, si $\vec{a} \neq 0$, $(\vec{a})^2 = |\vec{a}||\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{a})$, por ser $\cos(\vec{a}, \vec{a}) = \cos(0) = 1$; $(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2$, por tanto

$$|\vec{a}| = + \sqrt{(\vec{a})^2},$$

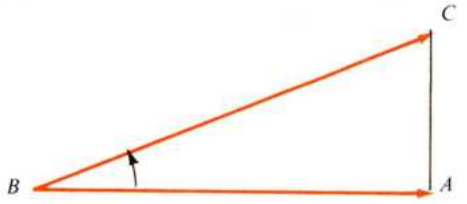
donde se toma la determinación positiva de la raíz cuadrada porque el módulo $|\vec{a}|$ del vector $\vec{a}$ es por definición un número positivo.

Nota: En la anterior igualdad no se puede simplificar la raíz cuadrada con el cuadrado, ya que el cuadrado es simplemente una forma abreviada de escribir el producto escalar de un vector por sí mismo, pero no es un cuadrado numérico.
Es conveniente advertir que algunos textos utilizan el término norma para indicar $\sqrt{(\vec{a})^2}$.

Ejemplos:

- Sea un vector libre $\vec{a}$ de módulo 5; entonces
  $\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2 = 5^2 = 25$

- Considera el triángulo rectángulo ABC de la figura 8.
  Entonces $[\overrightarrow{BA}] \cdot [\overrightarrow{BA}] = [\overrightarrow{BA}] \cdot [\overrightarrow{BC}]$
  En efecto: $[\overrightarrow{BA}] \cdot [\overrightarrow{BA}] = \overline{BA} \cdot \overline{BA} = \overline{BA}^2$
  y $[\overrightarrow{BA}] \cdot [\overrightarrow{BC}] = \overline{BA} \cdot \overline{BC} \cos B$. Por otra parte, $\overline{BC} = \dfrac{\overline{BA}}{\cos B}$,
  por tanto: $[\overrightarrow{BA}] \cdot [\overrightarrow{BC}] = \overline{BA} \cdot \dfrac{\overline{BA}}{\cos B} \cdot \cos B = \overline{BA} \cdot \overline{BA} = \overline{BA}^2$

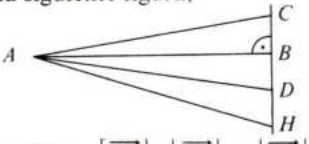


(Fig. 8)

4. Calcula el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ si
$(\vec{a})^2 = 25$; $(\vec{b})^2 = 81$ y $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. Calcula $(\vec{b})^2$ si
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 14$, $(\vec{a})^2 = 121$ y $(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\pi}{6}$

6. Como aplicación del segundo ejemplo del apartado **2.2.**, demuestra que, de acuerdo con la siguiente figura,



se verifica: $[\overrightarrow{AB}] \cdot [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AB}] \cdot [\overrightarrow{AC}] = [\overrightarrow{AB}] \cdot [\overrightarrow{AD}] = [\overrightarrow{AB}] \cdot [\overrightarrow{AH}]$

3 Propiedades del producto escalar

Estudiaremos en este apartado las siguientes propiedades del producto escalar:

3.1. *Conmutativa*

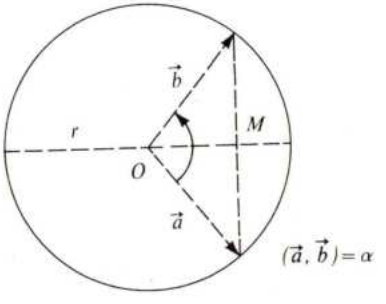
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ para cualesquiera $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$

En efecto: si $\vec{a} \neq \vec{0}$ y $\vec{b} \neq \vec{0}$,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}||\vec{a}| \cos(\vec{b}, \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$,

pues los ángulos $(\vec{a}, \vec{b})$ y $(\vec{b}, \vec{a})$ (ver figura 9) tienen el mismo coseno por ser opuestos entre sí, y el producto de módulos es un producto de números reales y por tanto conmutativo.

Si $\vec{a} = \vec{0}$ o $\vec{b} = \vec{0}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = \vec{b} \cdot \vec{a}$



$\cos(-\alpha) = \cos\alpha = \dfrac{OM}{r}$

(Fig. 9)

3.2. *Distributiva*

El producto escalar es distributivo con respecto a la suma de vectores de $\mathbf{V}^2$: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ para cualesquiera vectores $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{V}^2$

Para demostrar esta propiedad consideremos tres casos:

a) Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y $(\vec{b}+\vec{c})$ son no nulos.

Sean entonces $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ y $\overrightarrow{NP}$ representantes de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ respectivamente (Fig. 10); el vector $\overrightarrow{OP}$ es entonces un representante de $\vec{b}+\vec{c}$.

Tracemos por el punto N la recta r perpendicular a OM y la recta m paralela a OM.

Por el punto P trazamos la recta s perpendicular a OM. Entonces, como se observa en la figura 10, se tiene:

$$\overline{OP'}=\overline{ON'}+\overline{N'P'}\ \text{y}\ \overline{N'P'}=\overline{NP''}$$

Por otra parte:

$$\overline{OP'}=\overline{OP}\cdot\cos MOP=|\vec{b}+\vec{c}|\cos(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})$$
$$\overline{ON'}=\overline{ON}\cdot\cos MON=|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$$
$$\overline{NP''}=\overline{N'P'}=\overline{NP}\cdot\cos P''NP=|\vec{c}|\cos(\vec{a},\vec{c})$$

Luego:

$$|\vec{b}+\vec{c}|\cos(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})+|\vec{c}|\cos(\vec{a},\vec{c})$$

Multiplicando por $|\vec{a}|$ los dos miembros de la igualdad anterior, resulta:

$$|\vec{a}||\vec{b}+\vec{c}|\cos(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=$$
$$=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})+|\vec{a}||\vec{c}|\cos(\vec{a},\vec{c}),$$
$$\text{con lo cual}\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

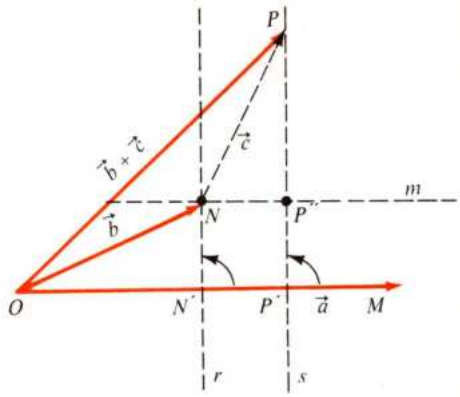
b) Consideremos ahora el caso en el cual $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son no nulos y $\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

Entonces $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{0}=0$. Todo se reduce, pues, a demostrar que $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ o, lo que es lo mismo, que $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\vec{a}\cdot\vec{c}$.

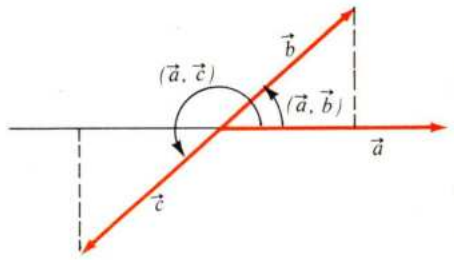
Por ser $\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores opuestos, luego $|\vec{b}|=|\vec{c}|$ y $(\vec{b},\vec{c})=\pi$, por lo cual los ángulos $(\vec{a},\vec{b})$ y $(\vec{a},\vec{c})$ tienen por coseno números reales opuestos (Fig. 11).

Por tanto:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{c}|(-\cos(\vec{a},\vec{c}))=$
$=-|\vec{a}||\vec{c}|\cos(\vec{a},\vec{c})=-\vec{a}\cdot\vec{c}$, como queríamos demostrar.



(Fig. 10)



(Fig. 11)

7. Sea $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$ tal que $|\vec{u}_1|=|\vec{u}_2|=2$ y $\cos(\vec{u}_1,\vec{u}_2)=0$. Calcula los siguientes productos escalares:

$\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1$, $\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2$, $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2$, $\vec{u}_2\cdot\vec{u}_1$

c) Consideremos finalmente el caso en el cual uno de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ o $\vec{c}$ es nulo.

Si $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ y $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$;

luego $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Si $\vec{b} = \vec{0}$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{0} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{c}$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

luego $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Ejemplos:

- Sean $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ vectores de $\mathbf{V}^2$ tales que $\vec{x} \cdot \vec{y} = 7$ y $\vec{x} \cdot \vec{z} = 8$; entonces $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z} = 7 + 8 = 15$

- En la figura 12, llamemos $[\overrightarrow{OA}] = \vec{u}$, $[\overrightarrow{OB}] = \vec{v}$, $[\overrightarrow{OB'}] = \vec{v}'$, $[\overrightarrow{BA}] = \vec{w}$ y $[\overrightarrow{B'A}] = \vec{\omega}'$; entonces:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\omega}'$$

En efecto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}\vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{u} = (\vec{u})^2 = |\vec{u}|^2$$

Análogamente, $\vec{u} \cdot \vec{v}' + \vec{u} \cdot \vec{\omega}' = \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{\omega}') = \vec{u} \cdot \vec{u} = (\vec{u})^2 = |\vec{u}|^2$

- Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$ tal que $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = 2$ y $\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$;

entonces:

a) $\vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 =$

$= (\vec{u}_1)^2 + |\vec{u}_1||\vec{u}_2| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = |\vec{u}_1|^2 + 0 = 2^2 = 4$

b) $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_1 + (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_2 =$

$= (\vec{u}_1)^2 + \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1 + \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 + (\vec{u}_2)^2 = (\vec{u}_1)^2 + 2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 + (\vec{u}_2)^2 =$

$= |\vec{u}_1|^2 + 2|\vec{u}_1||\vec{u}_2| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) + |\vec{u}_2|^2 = 2^2 + 0 + 2^2 = 8$

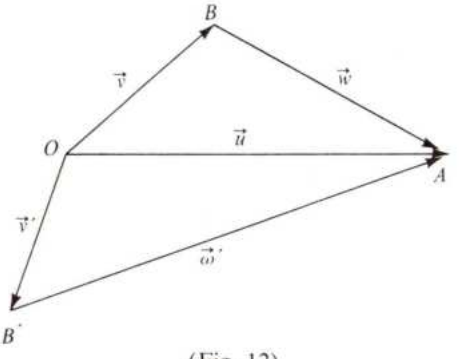
3.3. Para todo número real λ se verifica que $(\lambda \vec{\mathbf{a}}) \cdot \vec{\mathbf{b}} = \lambda (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})$ para cualesquiera vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$.

La demostración si $\lambda = 0$ es trivial. Supongamos, pues, primeramente, que $\lambda > 0$ y que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son no nulos; entonces el vector $\lambda \vec{a}$ tiene la misma dirección y el mismo sentido que el vector $\vec{a}$ (Fig. 13-a), por ello los ángulos $(\lambda \vec{a}, \vec{b})$ y $(\vec{a}, \vec{b})$ son iguales.

En consecuencia, teniendo en cuenta que $|\lambda| = \lambda$, resulta:

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda \vec{a}|\,|\vec{b}| \cos(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = (\lambda |\vec{a}|)|\vec{b}| \cos(\lambda \vec{a}, \vec{b}) =$$

$$= \lambda \left(|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})\right) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$



(Fig. 12)

8. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores tales que $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{3}$, $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 2$.
Calcula $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

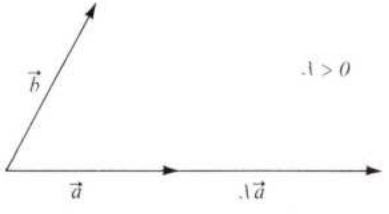
9. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores tales que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$ y $\vec{a} \cdot \vec{c} = 8$. Calcula los siguientes productos escalares:

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{b} + \vec{c})$

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c} + \vec{c})$

10. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores tales que $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 6$ y $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$. Calcula $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$



(Fig. 13-a)

Si $\lambda < 0$ y $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son no nulos, el vector $\lambda\vec{a}$ tiene la misma dirección que el vector $\vec{a}$ pero distinto sentido (Fig. 13-b), por ello los ángulos $(\lambda\vec{a}, \vec{b})$ y $(\vec{a}, \vec{b})$ son suplementarios, de donde $\cos(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = -\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Por tanto, teniendo en cuenta que $|\lambda| = -\lambda$, se tiene:

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (|\lambda||\vec{a}|)\cdot|\vec{b}|\cos(\lambda\vec{a}, \vec{b}) =$$

$$= (-\lambda|\vec{a}|)|\vec{b}|(-\cos(\vec{a}, \vec{b})) = \lambda(|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Finalmente, si $\vec{a}$ o $\vec{b}$ son nulos, la propiedad es evidente.

Ejemplos:

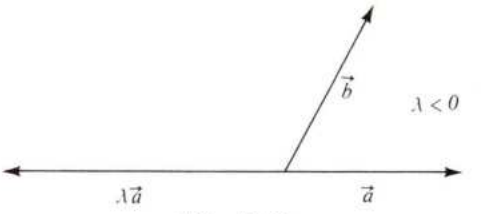
- Consideremos los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ de $\mathbf{V}^2$ tales que $\vec{x}\cdot\vec{y} = 4$, $\vec{x}\cdot\vec{z} = -5$.

  Entonces $\vec{x}\cdot(7\vec{y} + 8\vec{z}) = \vec{x}\cdot(7\vec{y}) + \vec{x}\cdot(8\vec{z}) =$

  $$= 7(\vec{x}\cdot\vec{y}) + 8(\vec{x}\cdot\vec{z}) = 7\cdot 4 + 8\cdot(-5) = -12$$

- Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$ tal que $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = 2$ y $\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \frac{1}{2}$ y sean $\vec{x} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$ e $\vec{y} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$; entonces:

  $$\vec{x}\cdot\vec{y} = (3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2)\cdot(\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2) =$$
  $$= (3u_1 + 2u_2)\cdot\vec{u}_1 + (3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2)\cdot(2\vec{u}_2) =$$
  $$= (3\vec{u}_1)\cdot\vec{u}_1 + (2\vec{u}_2)\cdot\vec{u}_1 + (3\vec{u}_1)\cdot(2\vec{u}_2) + (2\vec{u}_2)\cdot(2\vec{u}_2) =$$
  $$= 3(\vec{u}_1)^2 + 2(\vec{u}_2\cdot\vec{u}_1) + 6(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2) + 4(\vec{u}_2)^2 =$$
  $$= 3|\vec{u}_1|^2 + 8|\vec{u}_1||\vec{u}_2|\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) + 4|\vec{u}_2|^2 =$$
  $$= 12 + 16 + 16 = 44$$



(Fig. 13-b)

11. Demuestra que $(0\,\vec{a})\vec{b} = 0\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$ para cualesquiera vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

12. Demuestra que si $\vec{a} = \vec{0}$ o $\vec{b} = \vec{0}$, $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

13. Si $\vec{x}\cdot\vec{y} = 8$, calcula los productos escalares: $\vec{y}\cdot\vec{x}$, $\vec{x}\cdot(-\vec{y})$, $(-\vec{x})\cdot\vec{y}$, $(-\vec{x})\cdot(-\vec{y})$.

14. Si $\vec{a}\cdot\vec{b} = 27$, calcula:

$(7\vec{a})\cdot\vec{b}$; $(-\vec{a})\cdot(8\vec{b})$; $(12\vec{a})\cdot(-\vec{b})$;

$(\sqrt{2}\cdot\vec{a})\cdot(\sqrt{8}\,\vec{b})$; $\left(\frac{3}{4}\vec{a}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\vec{b}$

15. Demuestra que para cualesquiera vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ de $\mathbf{V}^2$ se verifica que

$$\vec{a}\cdot(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c}$$

16. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores de $\mathbf{V}^2$ tales que $\vec{a}\cdot\vec{b} = 7$ y $\vec{a}\cdot\vec{c} = 8$.

Calcula los siguientes productos escalares:

$\vec{a}\cdot(\vec{b} + \vec{c})$; $\vec{a}\cdot(\vec{b} - \vec{c})$; $\vec{a}\cdot(2\vec{b} + 6\vec{c})$;

$(7\vec{a})\cdot(3\vec{b} + 7\vec{c})$; $(-\vec{a})\cdot(\vec{b} - \vec{c})$;

$(-6\vec{a})\cdot(4\vec{b} - 3\vec{c})$

17. Sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$ tal que $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 3$ y $\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$.

Calcula $\vec{a}\cdot\vec{b}$ y $\vec{a}\cdot(3\vec{b})$, siendo

$$\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2$$
$$\vec{b} = 8\vec{e}_1 + 13\vec{e}_2$$

18. Si $\vec{a}\cdot\vec{b} = 12$ y $\vec{a}\cdot\vec{c} = 10$, calcula:

$\vec{a}\cdot(7\vec{b} + 8\vec{c})$; $\vec{a}\cdot(2\vec{b} + 6\vec{c})$; $(-\vec{a})\cdot(3\vec{b} + 5\vec{c})$

3.4. Para todo vector $\vec{a}$ se tiene que $(\vec{a})^2 \geqslant 0$, y la igualdad se verifica si y sólo si $\vec{a} = \vec{0}$.

3.5. Para cualesquiera $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^2$ se verifican las siguientes igualdades:

a) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2$

b) $(\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2$

c) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a})^2 - (\vec{b})^2$

Empecemos demostrando la igualdad a). Aplicando la propiedad distributiva, se tiene:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} =$$
$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = (\vec{a})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2$$

La igualdad b) se demuestra como consecuencia de a):

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} + (-\vec{b}))^2 = (\vec{a})^2 + 2\vec{a} \cdot (-\vec{b}) + (-\vec{b})^2 =$$
$$= (\vec{a})^2 + 2\vec{a} \cdot ((-1)\vec{b}) + (-1)(\vec{b})^2 = (\vec{a})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2$$

Por último demostremos la igualdad c):

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{b}) =$$
$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (-\vec{b}) + \vec{b} \cdot (-\vec{b}) =$$
$$= (\vec{a})^2 + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - (\vec{b})^2 = (\vec{a})^2 - (\vec{b})^2$$

Ejemplos:

- Sean $\vec{u}, \vec{v} \in V^2$ tales que $|\vec{u}| = 4, |\vec{v}| = 6$ y $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{1}{2}$;

  entonces:

  a) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u})^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + (\vec{v})^2 =$
  $= |\vec{u}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) + |\vec{v}|^2 =$
  $= 16 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (-1/2) + 36 = 28$

  b) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u})^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + (\vec{v})^2 =$
  $= 16 - 2 \cdot 4 \cdot 6 (-1/2) + 36 = 76$

  c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u})^2 - (\vec{v})^2 = 16 - 36 = -20$

- ¿Qué se puede afirmar de dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, tales que $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$?

  Si $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$, entonces $(\vec{a})^2 - (\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$; de donde $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$, y por tanto $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

19. Demuestra la propiedad **3.4.**

Indicación: Recuerda que $(\vec{x})^2 = |\vec{x}|^2$

20. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores tales que $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 8$ y $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Calcula: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$; $(\vec{a} + \vec{b})^2$; $(\vec{a} - \vec{b})^2$

21. Calcula el módulo de los vectores $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$ siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $(\vec{u})^2 = 16$; $(\vec{v})^2 = 36$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$

• Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores tales que $(\vec{a} - \vec{b})^2 = 21$, $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 7$.

Calculemos el valor de $\vec{a} \cdot \vec{b}$:

$$21 = (\vec{a})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2,\ 7 = (\vec{a})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2$$

Restando miembro a miembro ambas igualdades:

$21 - 7 = -4\vec{a} \cdot \vec{b}$; $14 = -4\vec{a} \cdot \vec{b}$, de donde $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{-7}{2}$

• Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores tales que $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ y $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1/2$; entonces se tiene que:

a) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2 = (3\vec{a})^2 + 2(3\vec{a}) \cdot (2\vec{b}) + (2\vec{b})^2 =$

$= 9(\vec{a})^2 + 12\,\vec{a} \cdot \vec{b} + 4(\vec{b})^2 =$

$= 9 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 \cdot 2\,(-1/2) + 4 \cdot 2^2 = 112$

b) $(\vec{a} - 3\vec{b})^2 = (\vec{a})^2 - 2\vec{a} \cdot (3\vec{b}) + (3\vec{b})^2 = (\vec{a})^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9(\vec{b})^2 =$

$= 16 + 24 + 36 = 76$

22. Calcula los siguientes productos escalares: $(\vec{x} + \vec{y})^2$, $(\vec{x} - \vec{y})^2$, $(3\vec{x} + 2\vec{y})^2$, $(8\vec{x} - 3\vec{y})^2$, $(2\vec{x} + 5\vec{y}) \cdot (2\vec{x} - 5\vec{y})$, sabiendo que $|\vec{x}| = |\vec{y}| = 3$ y $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \dfrac{1}{3}$

23. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores tales que

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 8 \text{ y } |\vec{a} - \vec{b}| = 6.$$

Calcula el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$

24. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores tales que $|\vec{b}| = 8$ y $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 14$.

Calcula el módulo del vector $\vec{a}$.

25. Si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 16$, $|\vec{a}| = 2$ y $|\vec{b}| = 12$, calcula: $(\vec{a} + 2\vec{b})^2$, $(3\vec{a} - \vec{b})^2$, $(4\vec{a} + 5\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 5\vec{b})$

4 Plano vectorial euclídeo

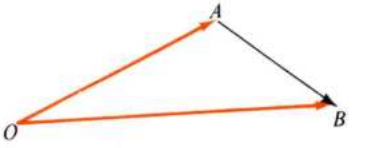
El espacio vectorial $(\mathbf{V}^2, +, \cdot\, \mathbb{R})$ de los vectores libres del plano dotado con el producto escalar $(\cdot)$ que hemos definido recibe el nombre de plano vectorial euclídeo, y lo representaremos también por $\mathbf{V}^2$.

5 Plano afín euclídeo

Sea $\mathscr{E}_2$ el espacio afín asociado al plano vectorial euclídeo $\mathbf{V}^2$; $\mathscr{E}_2$ recibe el nombre de *plano afín euclídeo.*

Hemos visto (2.º B.U.P. **Santillana**) que a todo par de puntos A y B de $\mathscr{E}_2$ le podemos asociar unívocamente un vector libre que designamos por $[\overrightarrow{AB}]$, y que para cualesquiera puntos A, B y C de $\mathscr{E}_2$ se verifica que:

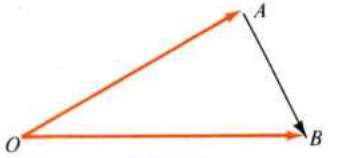
$$[\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{CB}] \text{ (Fig. 14)}$$



(Fig. 14)

También sabemos que, fijado un punto O, $\mathscr{E}_2$ puede dotarse de una estructura de espacio vectorial isomorfo a $(\mathbf{V}^2, +, \cdot\, \mathbb{R})$, verificándose además que para todo par de puntos A y B,

$$[\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{OB}] - [\overrightarrow{OA}] \text{ (Fig. 15).}$$



(Fig. 15)

6 Algunas aplicaciones del producto escalar

Aunque ya tendremos ocasión de aplicar el producto escalar en la Unidad 2 de trigonometría, lo aplicaremos ahora a los siguientes ejemplos.

6.1. Dados cuatro puntos, A, B, C y D, cualesquiera del plano, se verifica que: $[\overrightarrow{AB}]\cdot[\overrightarrow{CD}] + [\overrightarrow{AC}]\cdot[\overrightarrow{DB}] + [\overrightarrow{AD}]\cdot[\overrightarrow{BC}] = 0$

Para demostrarlo llamemos

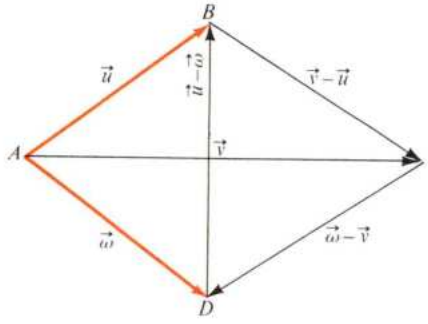
$\vec{u} = [\overrightarrow{AB}]$; $\vec{v} = [\overrightarrow{AC}]$; $\vec{\omega} = [\overrightarrow{AD}]$ (Fig. 16)

Entonces $[\overrightarrow{CD}] = \vec{\omega} - \vec{v}$; $[\overrightarrow{DB}] = \vec{u} - \vec{\omega}$; $[\overrightarrow{BC}] = \vec{v} - \vec{u}$

En consecuencia:

$$[\overrightarrow{AB}]\,[\overrightarrow{CD}] + [\overrightarrow{AC}]\,[\overrightarrow{DB}] + [\overrightarrow{AD}]\,[\overrightarrow{BC}] =$$
$$= \vec{u}\cdot(\vec{\omega}-\vec{v}) + \vec{v}\cdot(\vec{u}-\vec{\omega}) + \vec{\omega}\cdot(\vec{v}-\vec{u}) =$$
$$= \vec{u}\cdot\vec{\omega} - \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{\omega} + \vec{\omega}\cdot\vec{v} - \vec{\omega}\cdot\vec{u} = 0,$$

como queríamos demostrar.



(Fig. 16)

6.2. Las alturas de un triángulo son concurrentes.

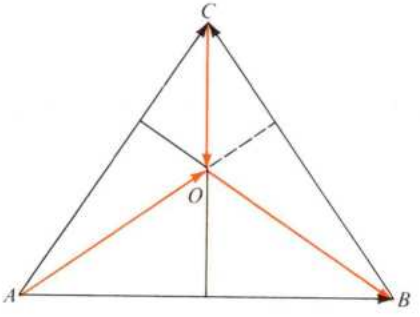
Sea ABC un triángulo. Tracemos las alturas correspondientes a los vértices C y B (Fig. 17) y llamemos O a su punto de intersección. Vamos a probar que la altura correspondiente al vértice A contiene el segmento $\overline{AO}$.

Por **6.1.** $[\overrightarrow{AB}]\cdot[\overrightarrow{CO}] + [\overrightarrow{AC}]\cdot[\overrightarrow{OB}] + [\overrightarrow{AO}]\cdot[\overrightarrow{BC}] = 0$

Por ser $[\overrightarrow{AB}]\cdot[\overrightarrow{CO}] = 0$ y $[\overrightarrow{AC}]\cdot[\overrightarrow{OB}] = 0$,

resulta que $[\overrightarrow{AO}]\cdot[\overrightarrow{BC}] = 0$

Por ser $\overline{AO} \neq 0$ y $\overline{BC} \neq 0$, el ángulo $([\overrightarrow{AO}], [\overrightarrow{BC}])$ es recto y por ello $\overline{AO}$ está contenido en la altura correspondiente al vértice A.



(Fig. 17)

6.3. El ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Consideremos un diámetro $\overline{AB}$ de una circunferencia de centro O y radio r (Fig. 18) y sea P un punto de la circunferencia distinto de A y distinto de B.

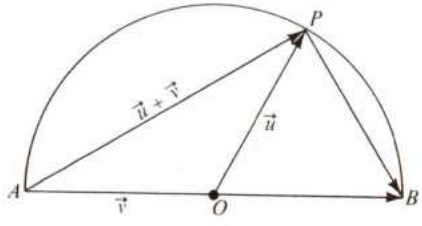
Llamemos $\vec{u} = [\overrightarrow{OP}]$ y $\vec{v} = [\overrightarrow{AO}] = [\overrightarrow{OB}]$;

entonces: $[\overrightarrow{AP}] = \vec{u} + \vec{v}$, $[\overrightarrow{PB}] = \vec{v} - \vec{u}$

y $[\overrightarrow{AP}]\cdot[\overrightarrow{PB}] = (\vec{u} + \vec{v})\cdot(\vec{v} - \vec{u}) = (\vec{v})^2 - (\vec{u})^2 =$

$= \overrightarrow{AO}^2 - \overrightarrow{OP}^2 = r^2 - r^2 = 0$

En consecuencia, el ángulo APB es recto.



(Fig. 18)

6.4. Para cualesquiera vectores $\vec{x}, \vec{y} \in V^2$, $|\vec{x} + \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}|$ (Fig. 19), desigualdad que se conoce con el nombre de *desigualdad triangular del módulo.*

En efecto:

$$(|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + 2|\vec{x}||\vec{y}| \qquad [1]$$

y por otra parte:

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 = (\vec{x} + \vec{y})^2 = (x)^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + (\vec{y})^2 =$$
$$= |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + 2|\vec{x}||\vec{y}| \cos(\vec{x}, \vec{y}),$$

de donde: $|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 = |\vec{x} + \vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}| \cos(\vec{x}, \vec{y})$

Sustituyendo en [1]:

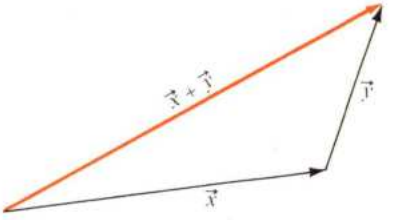
$$(|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2 = |\vec{x} + \vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}| \cos(\vec{x}, \vec{y}) + 2|\vec{x}||\vec{y}| =$$
$$= |\vec{x} + \vec{y}|^2 + 2|\vec{x}||\vec{y}|(1 - \cos(\vec{x}, \vec{y}))$$

Por ser $|\cos(\vec{x}, \vec{y})| \leqslant 1$, $(1 - \cos(\vec{x}, \vec{y})) \geqslant 0$; deducimos que

$$|\vec{x} + \vec{y}|^2 \leqslant (|\vec{x}| + |\vec{y}|)^2$$

Extrayendo en ambos miembros de la desigualdad la raíz cuadrada positiva, resulta:

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}|$$



(Fig. 19)

26. Demuestra que $|\vec{x} + \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$ si y sólo si $\vec{y} = \lambda\vec{x}$ y $\lambda \geqslant 0$.

7 Distancia en el plano afín euclídeo

Dados dos puntos, A y B, de $\mathscr{E}_2$, se define la distancia $d(A, B)$ del punto A al punto B de la siguiente forma:

$$\mathbf{d(A, B)} = \left|[\overrightarrow{AB}]\right|$$

y fijado un punto O, resulta:

$$\mathbf{d(A, B)} = \left|[\overrightarrow{AB}]\right| = \left|[\overrightarrow{OB}] - [\overrightarrow{OA}]\right| = +\sqrt{([\overrightarrow{OB}] - [\overrightarrow{OA}])^2}$$

De la expresión del módulo de un vector en el plano vectorial euclídeo se deducen fácilmente las siguientes propiedades de la distancia:

a) $\mathbf{d(A, B)} = 0$ si y sólo si $\mathbf{A = B}$.

En efecto: si $d(A, B) = 0$, $\left|[\overrightarrow{AB}]\right| = 0$, por tanto $[\overrightarrow{AB}] = 0$ de donde $A = B$.

Recíprocamente, si $A = B$, $[\overrightarrow{AB}] = \vec{0}$, de ahí que

$$\left|[\overrightarrow{AB}]\right| = d(A, B) = 0.$$

b) Para cualesquiera puntos **A** y **B** de $\mathscr{E}_2$, $\mathbf{d(A, B)} \geqslant \mathbf{0}$.

c) Propiedad simétrica: $\mathbf{d(A, B) = d(B, A)}$ para cualesquiera $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B} \in \mathscr{E}_2$.

En efecto:

$$d(A, B) = \left|[\overrightarrow{AB}]\right| = \left|[\overrightarrow{OB}] - [\overrightarrow{OA}]\right| = \left|-([\overrightarrow{OA}] - [\overrightarrow{OB}])\right| =$$
$$= |-1|\left|[\overrightarrow{OA}] - [\overrightarrow{OB}]\right| = \left|[\overrightarrow{OA}] - [\overrightarrow{OB}]\right| = \left|[\overrightarrow{BA}]\right| = d(B, A)$$

d) Propiedad triangular: Para cualesquiera puntos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ de $\mathscr{E}_2$, $\mathbf{d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B)}$.

En efecto: por la propiedad **6.4.**

$$d(A, B) = \left|[\overrightarrow{AB}]\right| = \left|[\overrightarrow{AC}] + [\overrightarrow{CB}]\right| \leqslant \left|[\overrightarrow{AC}]\right| + \left|[\overrightarrow{CB}]\right| =$$
$$= d(A, C) + d(C, B).$$

Ejemplo:

- Sea O un punto de $\mathscr{E}_2$ y sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$ tal que $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 2$ y $\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0$.

  Consideremos dos puntos, A y B, tales que $[\overrightarrow{OA}] = 3\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2$ y $[\overrightarrow{OB}] = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$

  Entonces: $([\vec{OB}])^2 = (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2)^2 = 4 + (-2)^2 \cdot 4 = 20$

  $([\overrightarrow{OA}])^2 = (3\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2)^2 = 9 \cdot 4 + 64 \cdot 4 = 292$

  $[\overrightarrow{OB}] \cdot [\overrightarrow{OA}] = (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) \cdot (3\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2) = 3 \cdot 4 + (-16) \cdot 4 = 52$

  $\left|[\overrightarrow{OB}] - [\overrightarrow{OA}]\right|^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 =$

  $= ([\overrightarrow{OB}])^2 - 2[\overrightarrow{OB}] \cdot [\overrightarrow{OA}] + ([\overrightarrow{OA}])^2 = 20 - 2 \cdot 52 + 292 = 208$

  En consecuencia:

$$d(A, B) = \left|[\overrightarrow{OB}] - [\overrightarrow{OA}]\right| = +\sqrt{208} = +4\sqrt{13}$$

27. Demuestra la propiedad b) del apartado **7.**

28. Sean A, B y C tres puntos de $\mathscr{E}_2$ tales que $d(A, C) = 8$ y $d(C, B) = 9$. Razona qué valor puede tener la distancia del punto A al punto B.

29. Sean O un punto del plano $\mathscr{E}_2$ y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$ tal que $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = 1$ y $\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$.
Calcula la distancia $d(A, B)$ sabiendo que $[\overrightarrow{OA}] = 3\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2$ y $[\overrightarrow{OB}] = 5\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2$.

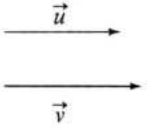
30. Bajo los supuestos del ejercicio **29,** calcula la distancia $d(EP)$ siendo $[\overrightarrow{OE}] = 3\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2$ y $[\overrightarrow{OP}] = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

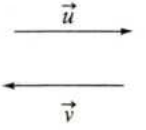
Ejercicios y cuestiones

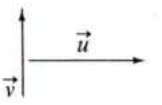
31. ¿Qué relación hay entre los ángulos $(\vec{a}, \vec{b})$ y $(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b})$ si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores libres no nulos de igual módulo y distinta dirección?

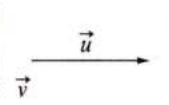
32. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores libres tales que $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1$. ¿Qué se puede afirmar de la dirección y del sentido de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

33. Indica en cada uno de los casos siguientes el valor del ángulo $(\vec{u}, \vec{v})$:

a) 

b) 

c) 

d) 

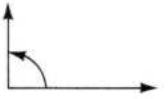
34. Sean dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tales que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$. Razona el valor del ángulo $(\vec{u}, -\vec{v})$.

35. Sean dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, tales que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$. Razona cuál es el valor del ángulo $(\vec{u}, \lambda\vec{v})$ si $\lambda > 0$ y $\lambda < 0$.

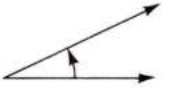
36. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores tales que $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ y $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Calcula el valor de los ángulos $(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}), (\vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$

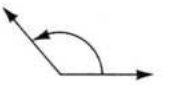
37. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores tales que $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$ y $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Calcula el valor de los ángulos $(\vec{a}, \vec{a} - \vec{b})$ y $(\vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$

38. Indica en cada uno de los siguientes casos si el producto escalar de los dos vectores representados es positivo, negativo o nulo.

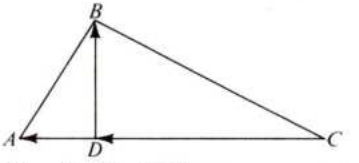
a) 

b)

c) 

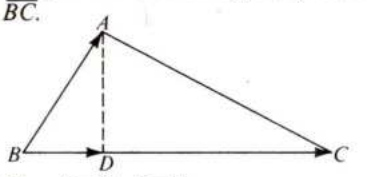
d) 

39. Considera el triángulo ABC de la figura adjunta y sea DB la altura correspondiente al vértice B.



Comprueba que $[\overrightarrow{DB}] \cdot [\overrightarrow{DB}] = [\overrightarrow{CD}] \cdot [\overrightarrow{DA}]$ (Teorema de la altura)

40. Considera el triángulo rectángulo ABC de la figura y sea $\overline{DB}$ la proyección del cateto $\overline{BA}$ sobre la hipotenusa $\overline{BC}$.



Comprueba que $[\overrightarrow{BA}] \cdot [\overrightarrow{BA}] = [\overrightarrow{BD}] \cdot [\overrightarrow{BC}]$ (Teorema del cateto)

Tema 2 ORTOGONALIDAD

En el tema anterior has visto que el producto escalar de dos vectores es un número real; si este número real es nulo, los vectores se dicen ortogonales.

El estudio de la ortogonalidad y sus repercusiones (perpendicularidad, independencia lineal...) nos va a servir de base para caracterizar determinados sistemas de referencia en el plano.

1 Vectores ortogonales

1.1. *Dados dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, no nulos del plano vectorial euclídeo $\mathbf{V}^2$, se dice que $\vec{a}$ es ortogonal a $\vec{b}$ si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.*

Si $\vec{a}$ es ortogonal a $\vec{b}$, $\vec{b}$ es ortogonal a $\vec{a}$ por ser $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; en consecuencia, si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, diremos simplemente que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales. Para expresar que dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales escribiremos $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Ejemplos:

- En la figura 1, los vectores $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}]$ y $\vec{v} = [\overrightarrow{AC}]$ son ortogonales, ya que el ángulo $(\vec{u}, \vec{v})$ es recto:
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}||\vec{v}|\, 0 = 0$$

- De acuerdo con la figura 2, los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, cuyos representantes son respectivamente $\overrightarrow{EP}$ y $\overrightarrow{FH}$, son ortogonales por ser recto el ángulo $(\vec{a}, \vec{b})$.

- Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$ tal que $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = 1$ y $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$.

  Los vectores $\vec{u} = 2\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2$ y $\vec{v} = -6\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$ son ortogonales, ya que $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2) \cdot (-6\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2) =$
$$= -12(\vec{u}_1)^2 + 6\vec{u}_1 \vec{u}_2 - 24\vec{u}_2 \vec{u}_1 + 12(\vec{u}_2)^2 =$$
$$= -12|\vec{u}_1|^2 + 12|\vec{u}_2|^2 = -12 \cdot 1 + 12 \cdot 1 = 0$$

  Nota: Observa que el vector nulo $\vec{0}$ es ortogonal a todo vector $\vec{a}$, ya que $\vec{0} \cdot \vec{a} = 0$.

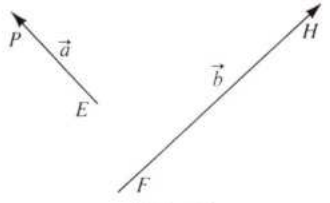
1.2. *Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos son ortogonales si y sólo si $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.*

Para demostrarlo, supongamos dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos y tales que $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Entonces:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\, 0 = 0$, con lo cual $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Por otra parte, si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son no nulos, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$, lo que hace que $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ por ser $|\vec{a}| \neq 0$ y $|\vec{b}| \neq 0$.

(Fig. 1)



(Fig. 2)

Ejercicios:

1. Sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$ tal que $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $|\vec{e}_1| = 2$ y $|\vec{e}_2| = 1$

a) Demuestra que los vectores

$\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ y

$\vec{b} = 2\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2$ son ortogonales.

b) Calcula λ para que los vectores

$\vec{u} = 8\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2$ y

$\vec{v} = 2\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2$ sean ortogonales.

c) Determina un vector ortogonal al vector

$$\vec{\omega} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

2. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores tales que el ángulo $(\vec{a}, \vec{b})$ es $\frac{3\pi}{2}$; demuestra que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales.

1.3. *Si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y λ es un número real cualquiera, entonces $\vec{a} \perp \lambda\vec{b}$.*

En efecto: $\vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot 0 = 0$

1.4. *Si $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$ y λ y μ son números reales cualesquiera, entonces $\vec{a} \perp (\lambda\vec{b} + \mu\vec{c})$.*

En efecto:

$\vec{a} \cdot (\lambda\vec{b} + \mu\vec{c}) = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) + \vec{a} \cdot (\mu\vec{c}) = \lambda\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \mu\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) =$
$= \lambda 0 + \mu 0 = 0.$

1.5. *Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales y no nulos, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes.*

Para demostrarlo consideramos la expresión $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$, en donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Multiplicando escalarmente por $\vec{a}$ los dos miembros de la igualdad, resulta:

$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{a} + (\mu\vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$, de donde $\lambda(\vec{a}\vec{a}) + \mu(\vec{b} \cdot \vec{a}) =$

$= \lambda\,(\vec{a} \cdot \vec{a}) = \lambda\,(\vec{a})^2 = \lambda\,|\vec{a}|^2 = 0$; por ser $\vec{a} \neq \vec{0}$ será $|\vec{a}| \neq 0$,

por tanto $\lambda = 0$.

Análogamente obtenemos que $\mu = 0$. Por lo tanto, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes.

1.6. *Dos vectores ortogonales y no nulos constituyen una base de* $(\mathbf{V}^2, +, \cdot\mathbb{R})$.

Esta afirmación es consecuencia de la propiedad anterior y del hecho de que $(\mathbf{V}^2, +, \cdot\mathbb{R})$ es un espacio vectorial de dimensión 2.

1.7. *Si $\vec{a} \perp \vec{b}$, se verifica que* $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$ (Fig. 3).

En efecto:

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2 = (\vec{a})^2 + 0 + (\vec{b})^2 =$
$= (\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

Esta expresión se conoce con el nombre de Teorema de Pitágoras.

1.8. *Dados dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, con $\vec{a} \neq \vec{0}$, existen un número real λ y un vector $\vec{c}$ ortogonal a $\vec{a}$ tales que*

$$\vec{b} = \lambda\vec{a} + \vec{c} \quad \text{(Fig. 4)}$$

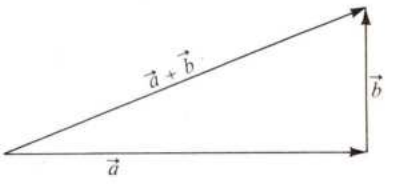
Para demostrarlo supongamos que es cierto, es decir, que existen $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{c} \in \mathbf{V}^2$ tales que $\vec{b} = \lambda\vec{a} + \vec{c}$ y $\vec{c} \perp \vec{a}$.

3. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores no nulos y ortogonales. Razona el valor del ángulo $(\vec{a}, \vec{b})$.

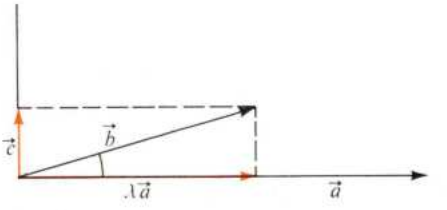
4. Razona por qué si $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp (-\vec{b})$

5. Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores no nulos y si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$, razona el valor del ángulo $(\vec{b}, \vec{c})$.

6. Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores no nulos tales que $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c})$, ¿son ortogonales los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$?



(Fig. 3)



(Fig. 4)

Multiplicando escalarmente por $\vec{a}$ los dos miembros de la igualdad anterior, resulta:

$\vec{b}\cdot\vec{a} = (\lambda\vec{a})\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{a}$, de donde $\vec{b}\cdot\vec{a} = \lambda\ (\vec{a})^2$, por lo cual

$$\lambda = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2} \quad [1]$$

y $\vec{b} = \left(\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a} + \vec{c}$; despejando $\vec{c}$: $\vec{c} = \vec{b} - \left(\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}$

Veamos finalmente que es cierto lo que hemos supuesto, es decir, que $\vec{c}$ es ortogonal a $\vec{a}$:

$$\vec{c}\cdot\vec{a} = \left(\vec{b} - \left(\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}\right)\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot\vec{a} - \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}(\vec{a}\cdot\vec{a}) =$$

$$= \vec{b}\cdot\vec{a} - \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}|\vec{a}|^2 = \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{a} = 0$$

con lo que la propiedad queda demostrada.

Ejemplos:

- Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores tales que $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 7$ y $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{1}{2}$.

  Vamos a calcular $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{c} \in \mathbf{V}^2$ tal que $\vec{b} = \lambda\vec{a} + \vec{c}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$.

  El valor de λ se obtiene aplicando la relación [1]:

  $$\lambda = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|} = \frac{7\cdot\frac{1}{2}}{6} = \frac{7}{12}$$

  y $\vec{c} = \vec{b} - \lambda\vec{a} = \vec{b} - \frac{7}{12}\vec{a}$

- Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores no nulos y ortogonales; entonces, como es fácil comprobar, $\lambda = 0$ y $\vec{c} = \vec{b}$.

- Sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$ tal que $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ y $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, y sean $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$, $\vec{b} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$

  Entonces $\lambda = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2} = \frac{(2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2)\cdot(\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2)}{|2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2|^2} =$

  $$= \frac{2(\vec{e}_1)^2 + 8\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + 3\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 + 12(\vec{e}_2)^2}{4(\vec{e}_1)^2 + 12\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + 9(\vec{e}_2)^2} =$$

  $$= \frac{2|\vec{e}_1|^2 + 12|\vec{e}_2|^2}{4|\vec{e}_1|^2 + 9|\vec{e}_2|^2} = \frac{14}{13}$$

  y $\vec{c} = \vec{b} - \lambda\vec{a} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \frac{14}{13}(2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2) = \frac{-15}{13}\vec{e}_1 + \frac{10}{13}\vec{e}_2$

7. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores no nulos tales que $(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. ¿Son los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ linealmente independientes?

8. ¿Forman una base dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ tales que $|\vec{x} + \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$?

9. Dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos son tales que $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$. ¿Constituyen los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ una base de $\mathbf{V}^2$?

10. Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$ tal que $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = 1$ y $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$

Considera los vectores $\vec{a} = 3\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2$

$\vec{b} = 2\vec{u}_1 - 7\vec{u}_2$

Calcula $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{c} \in \mathbf{V}^2$ tales que $\vec{b} = \lambda\vec{a} + \vec{c}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$.

11. Sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$ tal que $|\vec{e}_1| = 2, |\vec{e}_2| = 5$ y $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$

Calcula $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{\omega} \in \mathbf{V}^2$ tales que $\vec{v} = \lambda\vec{u} + \vec{\omega}$ y $\vec{\omega} \perp \vec{u}$, en donde

$\vec{u} = 8\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2$ y $\vec{v} = 2\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2$

12. Sea $B = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$ tal que $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = 2$ y $\vec{a}_1 \perp \vec{a}_2$

Calcula $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{\omega} \in \mathbf{V}^2$ tales que

$\vec{v} = \lambda\vec{u} + \vec{\omega}$ y $\vec{\omega} \perp \vec{u}$,

siendo $\vec{u} = 5\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2$ y $\vec{v} = 8\vec{a}_1 - \vec{a}_2$

2 Bases ortogonales y ortonormales

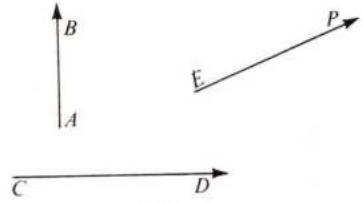
2.1. *Una base* $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ *del plano vectorial euclídeo* $\mathbf{V}^2$ *se dice ortogonal si* $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$.

Ejemplo:

- Considera los vectores representados en la figura 5.

  Los vectores libres $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ y $\vec{b} = [\overrightarrow{CD}]$ constituyen una base ortogonal de $\mathbf{V}^2$, mientras que los vectores $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ y $\vec{c} = [\overrightarrow{EP}]$ constituyen una base no ortogonal.

  Como consecuencia de **1.6.**, dos vectores no nulos y ortogonales constituyen una base ortogonal.



(Fig. 5)

2.2. *Un vector* $\vec{u}$ *se dice unitario si* $|\vec{u}| = 1$.

Si $\vec{a}$ es un vector arbitrario y no nulo, $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ es unitario.

En efecto: $\left|\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = +\sqrt{\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)^2} = +\sqrt{\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2}} = +\sqrt{1} = 1$

2.3. *Una base* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ *del plano vectorial euclídeo* $\mathbf{V}^2$ *se dice ortonormal si es ortogonal y si los vectores* $\vec{u}_1$ *y* $\vec{u}_2$ *son unitarios. Es decir:*

$$B \text{ es ortonormal si } \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \quad \text{y} \quad |\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = 1$$

Si $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es una base ortogonal, $\left\{\dfrac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}, \dfrac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}\right\}$ es una base ortonormal.

Ejemplo:

- Sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal; entonces los vectores

$$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{u}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{u}_2 \quad \text{y} \quad \vec{b} = \frac{-2}{\sqrt{5}}\vec{u}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{u}_2$$

constituyen otra base ortonormal. En efecto:

$$|\vec{a}|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{u}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{u}_2\right)^2 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$$

$$|\vec{b}|^2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\vec{u}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{u}_2\right)^2 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

Por tanto, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$

Por otra parte: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{u}_1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\vec{u}_2\right) \cdot \left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\vec{u}_1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\vec{u}_2\right) =$

$= \dfrac{-2}{5} + \dfrac{2}{5} = 0$, lo que prueba que $\vec{a} \perp \vec{b}$.

13. Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base ortogonal de $\mathbf{V}^2$ y sea $\vec{a} = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$. Determina el vector unitario $\vec{a}\,'$ con la misma dirección y sentido que $\vec{a}$.

14. Siendo $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base ortogonal de $\mathbf{V}^2$ tal que $|\vec{e}_1| = 2$ y $|\vec{e}_2| = 5$, halla un vector unitario proporcional al vector $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2$.

15. Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal de $\mathbf{V}^2$. Demuestra que los vectores

$$\vec{a} = \frac{12}{\sqrt{13}}\vec{u}_1 - \frac{5}{\sqrt{13}}\vec{u}_2$$

y

$$\vec{b} = \frac{5}{\sqrt{13}}\vec{u}_1 + \frac{12}{\sqrt{13}}\vec{u}_2$$

constituyen una base ortogonal.

2.4. Dada una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de $\mathbf{V}^2$, se puede encontrar otra a partir de ella que sea ortonormal.

En efecto, por **1.8.** $\vec{e}_1$ se puede escribir:

$$\vec{e}_1 = \lambda\vec{e}_2 + \vec{u}, \quad \text{en donde} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \vec{u} \perp \vec{e}_2$$

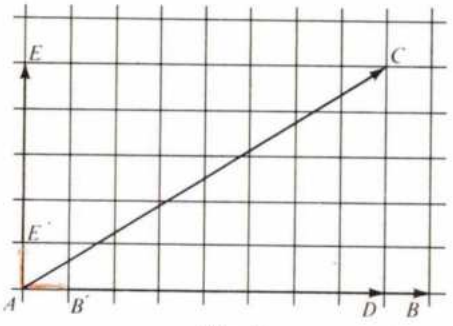
El vector $\vec{u}$ debe ser distinto del vector cero, ya que de otro modo $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ serían linealmente dependientes, por ello los vectores $\vec{u}$ y $\vec{e}_2$ constituyen una base ortogonal.

Por **2.4.** los vectores $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ y $\frac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}$ son ortogonales, como además son unitarios, forman una base ortonormal de $\mathbf{V}^2$.

Ejemplo:

- En la figura 6 los vectores $[\overrightarrow{AB}]$ y $[\overrightarrow{AC}]$ constituyen una base de $\mathbf{V}^2$.

  Como $[\overrightarrow{AC}] = [\overrightarrow{AD}] + [\overrightarrow{AE}]$, en donde $[\overrightarrow{AE}] \perp [\overrightarrow{AB}]$, los vectores $[\overrightarrow{AE}]$ y $[\overrightarrow{AB}]$ forman una base ortogonal, por tanto los vectores $\frac{1}{5}[\overrightarrow{AE}] = [\overrightarrow{AE'}]$ y $\frac{1}{9}[\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AB'}]$ forman una base ortonormal.



(Fig. 6)

3 Expresión analítica del producto escalar

3.1. Consideremos una base ortonormal $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ del plano vectorial euclídeo $\mathbf{V}^2$ y sean los vectores

$$\vec{a} = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2 \quad \text{y} \quad \vec{b} = x_2\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2; \text{ entonces:}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2)\cdot(x_2\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2) =$$

$$= x_1x_2(\vec{u}_1)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 + y_1y_2(\vec{u}_2)^2 =$$

$$= x_1x_2|\vec{u}_1|^2 + y_1y_2|\vec{u}_2|^2 = x_1x_2 + y_1y_2.$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ expresa el producto escalar de dos vectores en función de sus coordenadas respectivas según una base ortonormal.

Ejemplos:

- Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal y sea

  $$\vec{a} = 3\vec{u}_1 + 8\vec{u}_2 \quad \text{y} \quad \vec{b} = 4\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2; \text{ entonces:}$$

  $$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 14 + 8\cdot(-3) = 18$$

• Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal y sean

$\vec{u} = 3\vec{u}_1 - 4\vec{u}_2$, $\vec{v} = 5\vec{u}_1 + 6\vec{u}_2$ y $\vec{\omega} = 8\vec{u}_1 + 10\vec{u}_2$;

entonces:

a) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{\omega}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{\omega} =$

$= (3\vec{u}_1 - 4\vec{u}_2) \cdot (5\vec{u}_1 + 6\vec{u}_2) + (3\vec{u}_1 - 4\vec{u}_2) \cdot (8\vec{u}_1 + 10\vec{u}_2) =$

$= 15 - 24 + 24 - 40 = -25$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{\omega}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{\omega} =$

$= (3\vec{u}_1 - 4\vec{u}_2) \cdot (5\vec{u}_1 + 6\vec{u}_2) - (3\vec{u}_1 - 4\vec{u}_2) \cdot (8\vec{u}_1 + 10\vec{u}_2) =$

$= 15 - 24 - (24 - 40) = 7$

c) $\vec{u} \cdot (6\vec{v}) = (3\vec{u}_1 - 4\vec{u}_2) \cdot (30\vec{u}_1 + 36\vec{u}_2) = 90 - 144 = -54$

3.2. Veamos a continuación cuál es la expresión analítica del módulo de un vector según una base ortonormal.

Consideremos una base ortonormal $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ de $\mathbf{V}^2$ y sea $\vec{u} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2$; entonces:

$|\vec{u}|^2 = (\vec{u})^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = (x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2) \cdot (x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2) = x^2 + y^2$,

de donde $|\vec{u}| = +\sqrt{x^2 + y^2}$.

Es decir: *el módulo de un vector es igual a la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de sus coordenadas respecto a una base ortonormal.*

Ejemplo:

• Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal y sean

$\vec{a} = 3\vec{u}_1 - 8\vec{u}_2$, $\vec{b} = 4\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$ y $\vec{c} = 6\vec{u}_1 + 8\vec{u}_2$;

entonces: $|\vec{a}| = +\sqrt{3^2 + (-8)^2} = +\sqrt{9 + 64} = +\sqrt{73}$

$|\vec{b}| = +\sqrt{4^2 + (-3)^2} = +\sqrt{16 + 9} = 5$

3.3. Sean $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$ e $\vec{v} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$ dos vectores de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respecto de una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ortonormal.

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, su producto escalar es nulo: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, es decir, $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

La relación $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ es la condición de ortogonalidad de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejemplo:

• Si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es una base ortonormal, los vectores $\vec{x} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ e $\vec{y} = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ son ortogonales, pues

$\vec{x} \cdot \vec{y} = 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 0$

16. Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal de $\mathbf{V}^2$ y sean $\vec{u} = 4\vec{u}_1 + 8\vec{u}_2$ y $\vec{v} = -8\vec{u}_1 + 12\vec{u}_2$.

Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

17. Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal de $\mathbf{V}^2$ y sean $\vec{a} = 3\vec{u}_1 + 8\vec{u}_2$ y $\vec{b} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$.

Calcula los siguientes productos escalares:

$\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\vec{a} \cdot (-\vec{b})$; $(-\vec{a}) \cdot \vec{b}$; $(-\vec{a}) \cdot (-\vec{b})$;

$\vec{a} \cdot (3\vec{a} + 2\vec{b})$; $(8\vec{a}) \cdot (7\vec{b})$

18. Sabiendo que $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base ortogonal de $\mathbf{V}^2$, calcula λ para que los vectores $\vec{a} = 4\vec{u}_1 + 7\vec{u}_2$ y $\vec{b} = 3\vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_2$ sean ortogonales.

19. Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal de $\mathbf{V}^2$, $\vec{a} = 3\vec{u}_1 + 8\vec{u}_2$ y $\vec{b} = 4\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$

Calcula $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

20. En los supuestos del ejercicio **19**, calcula λ para que el vector $\vec{u} = 3\vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_2$ sea unitario.

4 Expresión analítica de la distancia entre dos puntos

Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal de $\mathbf{V}^2$, O un punto fijo de $\mathscr{E}_2$ y A, B dos puntos arbitrarios (Fig. 7).

Supongamos que:

$$[\overrightarrow{OA}] = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2$$

$$[\overrightarrow{OB}] = x_2\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2; \text{ entonces:}$$

$$d(AB) = \left|[\overrightarrow{AB}]\right| = \left|[\overrightarrow{OB}] - [\overrightarrow{OA}]\right| =$$

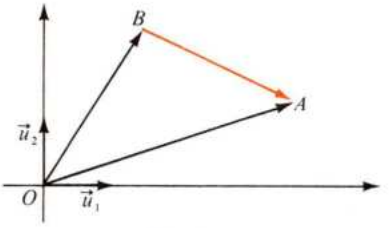
$$= |x_2\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 - (x_1\vec{u}_1 + x_1\vec{u}_2)| =$$

$$= |(x_2 - x_1)\vec{u}_1 + (y_2 - y_1)\vec{u}_2| = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplos:

- Sean O un punto fijo de $\mathscr{E}_2$ y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal de $\mathbf{V}^2$. Considera los puntos A y B tales que $[\overrightarrow{OA}] = 8\vec{u}_1 - 4\vec{u}_2$ y $[\overrightarrow{OB}] = 6\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$; entonces:
  $d(A, B) = +\sqrt{(6-8)^2 + (2-(-4))^2} = +\sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$.

- Si $[\overrightarrow{OA}] = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$ y $[\overrightarrow{OB}] = 4\vec{u}_1 + 6\vec{u}_2$, siendo $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal, entonces:
  $$d(A, B) = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{25} = 5$$



(Fig. 7)

21. Utilizando la expresión analítica de la distancia entre dos puntos, demuestra que

a) $d(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$,

b) $d(A, B) = d(B, A)$ cualesquiera que sean los puntos A y B.

22. Sean O un punto de $\mathscr{E}_2$ y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal de $\mathbf{V}^2$.

Calcula la distancia entre los puntos A y B tales que $[\overrightarrow{OA}] = \vec{u}_1 + 8\vec{u}_2$ y

$$[\overrightarrow{OB}] = 4\vec{u}_1 - 6\vec{u}_2$$

Ejercicios y cuestiones

23. Sean O un punto de $\mathscr{E}_2$ y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal de $\mathbf{V}^2$. Calcula λ para que la distancia entre los puntos A' y B' sea 6, siendo $[\overrightarrow{OA'}] = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ y $[\overrightarrow{OB'}] = \lambda\vec{u}_1 + 8\vec{u}_2$

24. Sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base ortogonal de $\mathbf{V}^2$ y tal que $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2|$.

Demuestra que los vectores $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ y $\vec{v} = -y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2$ tienen el mismo módulo y son ortogonales.

25. ¿Qué se puede afirmar de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que los vectores $(\vec{a} + \vec{b})$ y $(\vec{a} - \vec{b})$ son ortogonales?

26. Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal de $\mathbf{V}^2$ y sean $\vec{a} = 4\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2$, $\vec{b} = 11\vec{e}_1 - 10\vec{e}_2$ y $\vec{c} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

a) Calcula los siguientes productos escalares:

$\vec{a}\cdot(2\vec{b})$; $(\vec{a} + \vec{b})\cdot\vec{c}$; $(2\vec{a} + \vec{c})\cdot(4\vec{b} + 2\vec{c})$; $(\vec{a} + \vec{c})\cdot(\vec{a} - \vec{c})$; $7\vec{c}\cdot(2\vec{a} + 3\vec{b})$

b) Calcula $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in \mathbf{V}^2$ tales que $\vec{a} = \lambda\vec{c} + \vec{u}$ y $\vec{u} \perp \vec{c}$

c) Calcula $\mu \in \mathbb{R}$ y $\vec{v} \in \mathbf{V}^2$ tales que $\vec{b} = \mu\vec{c} + \vec{v}$ y $\vec{v} \perp \vec{c}$

d) ¿Qué relación guardan entre sí los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de los apartados b) y c)?

27. Calcula $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ sabiendo que $\vec{u} = 8\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2$, $\vec{v} = 14\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ y que $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es una base ortonormal.

28. Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal de $\mathbf{V}^2$. Determina una base ortonormal $B' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ en donde el vector $\vec{e}_2$ sea proporcional al vector $\vec{a} = 4\vec{u}_1 + 8\vec{u}_2$.

29. Sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base ortogonal de $\mathbf{V}^2$ tal que $|\vec{e}_1| = 4$ y $|\vec{e}_2| = 1$. Determina una base ortonormal $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ en donde el vector $\vec{u}_2$ tenga la misma dirección y el mismo sentido que el vector $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

30. Sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base ortogonal de $\mathbf{V}^2$ tal que $|\vec{e}_1| = 2$ y $|\vec{e}_2| = 3$. Calcula la distancia entre dos puntos A y B tales que siendo O un punto fijo, $[\overrightarrow{OA}] = 4\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ y $[\overrightarrow{OB}] = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$.

31. Sea O un punto de $\mathscr{E}_2$ y sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal de $\mathbf{V}^2$. Calcula el perímetro de un triángulo ABC sabiendo que

$[\overrightarrow{OA}] = 3\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$, $[\overrightarrow{OB}] = 9\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2$, $[\overrightarrow{OC}] = 4\vec{u}_1 + 9\vec{u}_2$

32. Bajo los supuestos del ejercicio **31,** calcula el perímetro de un cuadrilátero $ABCD$ tal que

$[\overrightarrow{OA}] = 3\vec{u}_1 + 4\vec{u}_2$, $[\overrightarrow{OB}] = 2\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$, $[\overrightarrow{OC}] = -5\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$, $[\overrightarrow{OD}] = -6\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$

Tema 3 FORMAS LINEALES Y BILINEALES

En este tema se va a tratar de formalizar la definición de producto escalar en un espacio vectorial real de dimensión dos. En principio, vamos a revisar el concepto de aplicación lineal o forma lineal sobre un espacio vectorial real de dimensión dos, para introducir a continuación el de forma bilineal sobre dicho espacio vectorial. Veremos que definir un producto escalar en un espacio vectorial **V** *no es más que determinar una cierta forma bilineal sobre* **V**. *Finalmente comprobaremos también que la definición ya dada de producto escalar en el espacio vectorial de los vectores libres del plano* $(\mathbf{V}^2, +, \cdot\, \mathbb{R})$ *se ajusta a esta nueva definición formalizada.*

1 Formas lineales sobre un espacio vectorial de dimensión dos

1.1. Sea **V** un espacio vectorial real de *dimensión dos. Una aplicación* $f: \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ *se llama forma lineal definida sobre* **V** *si*

a) $\mathbf{f}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathbf{f}(\vec{x}) + \mathbf{f}(\vec{y}),\ \forall\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$

b) $\mathbf{f}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathbf{f}(\vec{x}),\ \forall\ \vec{x} \in \mathbf{V}$ y $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

- Consideremos el espacio vectorial real $(\mathbb{R}^2, +, \cdot\, \mathbb{R})$; la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(x, y) \longrightarrow 3x + 3y$ es una forma lineal definida sobre $\mathbb{R}^2$.

  En efecto: sean (x_1, y_1), (x_2, y_2) dos elementos cualesquiera de $\mathbb{R}^2$, entonces

  $$f[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$$
  $$= 3(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) = (3x_1 + 3x_2) + (3y_1 + 3y_2) =$$
  $$= (3x_1 + 3y_1) + (3x_2 + 3y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$$

  Sea λ un número real arbitrario y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces:

  $$f\big(\lambda(x, y)\big) = f(\lambda x, \lambda y) = 3(\lambda x) + 3(\lambda y) = \lambda(3x + 3y) = \lambda f(x, y)$$

- La aplicación $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(x, y) \longrightarrow x - y$ es una forma lineal definida sobre el espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot\, \mathbb{R})$, ya que:

  a) si (x_1, y_1) (x_2, y_2) son elementos arbitrarios de $\mathbb{R}^2$,

  $$h[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = h(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) =$$
  $$= x_1 - y_1 + x_2 - y_2 = h(x_1, y_1) + h(x_2, y_2)$$

  b) si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $h\big(\lambda(x, y)\big) = h(\lambda x, \lambda y) = \lambda x - \lambda y =$
  $$= \lambda(x - y) = \lambda h(x, y)$$

Ejercicios:

1. Demuestra que si $f: \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma lineal definida sobre **V**, $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in \mathbf{V}$.

2. Averigua cuáles de las siguientes aplicaciones de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ son formas lineales sobre $\mathbb{R}^2$:

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \longrightarrow x + 5y$

$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \longrightarrow -x$

$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \longrightarrow x^2 + y^2$

• Consideremos el espacio vectorial de los vectores libres del plano $(\mathbf{V}^2, +, \cdot \mathbb{R})$ y sea $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$.

La aplicación p_1: $\mathbf{V}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \longrightarrow x$

es una forma lineal definida sobre $\mathbf{V}^2$ y recibe el nombre de *primera proyección* (Fig. 1).

En efecto:

a) Sean $\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$ y $\vec{v} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$ elementos cualesquiera de $\mathbf{V}^2$; entonces:

$$p_1(\vec{u} + \vec{v}) = p_1\big((x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2) + (x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2)\big) =$$
$$= p_1\big((x_1 + x_2)\vec{e}_1 + (y_1 + y_2)\vec{e}_2\big) = x_1 + y_1 =$$
$$= p_1(x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2) + p_1(x_2\vec{e}_2 + y_2\vec{e}_2) = p_1(\vec{u}) + p_1(\vec{v}).$$

b) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y sea $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$; entonces:

$$p_1(\lambda\vec{u}) = p_1\big(\lambda(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2)\big) = p_1\big((\lambda x)\vec{e}_1 + (\lambda y)\vec{e}_2\big) =$$
$$= \lambda x = \lambda p_1(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = \lambda p_1(\vec{u}).$$

1.2. Fijada una base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ de dimensión dos, *la expresión de una forma lineal definida sobre* $\mathbf{V}$ *está determinada de forma única por las imágenes de los elementos de la base* B.

Para comprobarlo, consideremos un vector arbitrario $\vec{u}$ de $\mathbf{V}$, $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$; entonces, si f es una forma lineal definida sobre $\mathbf{V}$,

$$f(\vec{u}) = f(x_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2) = f(x_1\vec{e}_1) + f(y_2\vec{e}_2) = x_1 f(\vec{e}_1) + y_2 f(\vec{e}_2)$$

Es decir: se puede conocer la imagen de un elemento cualquiera $\vec{u}$ de $\mathbf{V}$ conociendo la imagen de los elementos de una base B y las coordenadas de $\vec{u}$ respecto de ella.

Ejemplos:

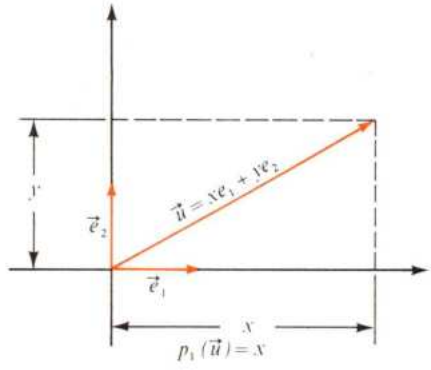
• Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot \mathbb{R})$. Consideremos la base canónica $\{(1,0)\ (0,1)\}$ y sea h una forma lineal sobre $\mathbb{R}^2$ tal que $h(1,0) = 2$, $h(0,1) = 3$.

Si (x, y) es un elemento arbitrario de $\mathbb{R}^2$,

$$h(x, y) = h\big(x(1,0) + y(0,1)\big) = xh(1,0) + yh(0,1) = 2x + 3y.$$

Luego h es la aplicación tal que

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow 2x + 3y$$



(Fig. 1)

3. Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base del espacio vectorial de los vectores libres del plano $(\mathbf{V}^2, +, \cdot \mathbb{R})$. Comprueba que la aplicación

p_2: $\mathbf{V}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\vec{u} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \longrightarrow x_2$ es una forma lineal definida sobre $\mathbf{V}^2$.

4. Demuestra que f es una forma lineal definida sobre un espacio vectorial real $\mathbf{V}$ de dimensión dos si y sólo si

$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$ para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y para cualesquiera $\vec{v}$ y $\vec{u} \in \mathbf{V}$.

5. Considera el espacio vectorial $(\mathbf{V}^2, +, \cdot \mathbb{R})$ de los vectores libres del plano.

Demuestra que

$$f: \mathbf{V}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\vec{u} \longrightarrow |\vec{u}|$$

no es una aplicación lineal definida sobre $\mathbf{V}^2$.

6. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial de dimensión dos y sea

$$f: \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow a$$

Calcula el valor de a para que f sea una aplicación lineal definida sobre $\mathbf{V}$.

• Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot \mathbb{R})$ y consideremos la base $B = \{(4,5), (3,2)\}$. Sea f una forma lineal definida sobre $\mathbb{R}^2$ tal que $f(4,5) = 7, f(3,2) = -2$.

Consideremos un elemento arbitrario $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas respecto a la base canónica son (x, y) y cuyas coordenadas respecto a la base B son (x^*, y^*). Entonces tenemos las siguientes expresiones del vector $\vec{u}$:

$$\vec{u} = x\,(1,0) + y\,(0,1)$$
$$\vec{u} = x^*\,(4,5) + y^*\,(3,2) =$$
$$= x^*\big(4(1,0) + 5(0,1)\big) + y^*\big(3\,(1,0) + 2\,(0,1)\big),$$

de donde

$$4x^* + 3y^* = x$$
$$5x^* + 2y^* = y$$

Resolviendo este sistema, se obtiene:

$$x^* = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y; \quad y^* = \frac{5}{7}x - \frac{4}{7}y$$

Por tanto:

$f(\vec{u}) = f[x^*(4,5) + y^*(3,2)] = x^* f(4,5) + y^* f(3,2)$,
y sustituyendo los valores de $f(4,5)$ y $f(3,2)$, se tiene:

$$f(\vec{u}) = 7x^* - 2y^* = 7\left(-\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y\right) - 2\left(\frac{5}{7}x - \frac{4}{7}y\right) =$$
$$= -2x + 3y - \frac{10}{7}x + \frac{8}{7}y = -\frac{24}{7}x + \frac{29}{7}y$$

En consecuencia, f es la aplicación definida por

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow -\frac{24}{7}x + \frac{29}{7}y$$

7. Considera la aplicación

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que}$$
$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant y \\ y & \text{si} \quad x < y \end{cases}$$

Demuestra que f no es una forma lineal sobre $\mathbb{R}^2$.

8. ¿Cómo es la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(0,1) = f(1,0) = 0$ sabiendo que es lineal sobre $\mathbb{R}^2$?

9. Halla la expresión general de una forma lineal g definida sobre $\mathbb{R}^2$ tal que

$$g(1,0) = K \quad \text{y} \quad g(0,1) = 2K$$

10. Halla la expresión general de una forma lineal f definida sobre $\mathbb{R}^2$ tal que

$$f(1,0) = 3 \quad \text{y} \quad f(0,1) = 4$$

11. Halla la expresión general de una forma lineal f definida sobre $\mathbb{R}^2$ tal que

$$f(1,0) = 2 \quad \text{y} \quad f(0,1) = -2$$

12. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, una forma lineal definida sobre él es tal que $f(1,0) = -4$ y $f(0,1) = 2$. Halla la expresión general de la imagen de un elemento $\vec{u}$ cuyas coordenadas (x, y) vienen expresadas respecto a la base $(3,-1), (8,4)$.

2 Formas bilineales sobre un espacio vectorial de dimensión dos

Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. La aplicación

$$g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1x_2 + y_1y_2$$

verifica las siguientes propiedades:

a) $g\big((x_1, y_1) + (x_3, y_3), (x_2, y_2)\big) = g\big((x_1 + x_3, y_1 + y_3), (x_2, y_2)\big) =$
$= (x_1 + x_3)\cdot x_2 + (y_1 + y_3)\cdot y_2 = x_1x_2 + x_3x_2 + y_1y_2 + y_3y_2 =$
$= x_1x_2 + y_1y_2 + x_3x_2 + y_3y_2 =$
$= g\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) + g\big((x_3, y_3), (x_2, y_2)\big)$

b) $g\left((x_1, y_1), (x_2, y_2) + (x_3, y_3)\right) = g\left((x_1, y_1), (x_2 + x_3, y_2 + y_3)\right) =$
$= x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 =$
$= x_1x_2 + y_1y_2 + x_1x_3 + y_1y_3 =$
$= g\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) + g\left((x_1, y_1), (x_3, y_3)\right)$

c) $g\left(\lambda(x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = g\left((\lambda x_1, \lambda y_1), (x_2, y_2)\right) =$
$= (\lambda x_1)x_2 + (\lambda y_1)y_2 = \lambda(x_1x_2) + \lambda(y_1y_2) =$
$= \lambda(x_1x_2 + y_1y_2) = \lambda g\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right)$

d) $g\,(x_1, y_1), \lambda(x_2, y_2) = g\left((x_1, y_1), (\lambda x_2, \lambda y_2)\right) = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2)$
$= \lambda(x_1x_2) + \lambda(y_1y_2) = \lambda(x_1x_2 + y_1y_2) = \lambda g\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right)$

Por cumplir estas propiedades diremos que la aplicación g es una forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$.

2.1. En general, si $\mathbf{V}$ es un espacio vectorial real de dimensión dos, *una aplicación* $f: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una forma bilineal definida sobre* $\mathbf{V}$ *si*

a) $f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{w}) + f(\vec{v}, \vec{w}) \; \forall \; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}$

b) $f(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{u}, \vec{v}) + f(\vec{u}, \vec{w}) \; \forall \; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}$

c) $f(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}, \vec{v}) \; \forall \; \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V} \quad$ y $\quad \forall \; \lambda \in \mathbb{R}$

d) $f(\vec{u}, \lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}, \vec{v}) \; \forall \; \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V} \quad$ y $\quad \forall \; \lambda \in \mathbb{R}$

2.2. *Una forma bilineal definida sobre un espacio vectorial real* $\mathbf{V}$ *de dimensión dos,* $f: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$, *se dice simétrica si* $f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u})$ *para cualesquiera vectores* $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}$.

Ejemplos:

- La forma bilineal $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida en el ejemplo anterior, es una forma bilineal simétrica, ya que
$g((x_1y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1 = g((x_2, y_2), (x_1y_1))$

- La aplicación
$$h: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) \longrightarrow x_1x_2 + y_1x_2 + 2y_1y_2$$
es una forma bilineal (compruébelo el alumno como ejercicio) que no es simétrica. En efecto: consideremos los elementos de $\mathbb{R}^2$ (1,1) y (2,0); entonces
$$h\left((1,1), (2,0)\right) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 = 4$$
$$h\left((2,0), (1,1)\right) = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 2$$

13. Demuestra que si f es una forma bilineal definida sobre un espacio vectorial real $\mathbf{V}$, entonces $\forall \; \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall \; \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}$
$$f(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{u}, \lambda\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}, \vec{v})$$

14. Considera la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$$\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) \longrightarrow x_1 + x_2$$
Averigua si f es una forma bilineal sobre $\mathbb{R}^2$.

15. Averigua cuáles de las siguientes aplicaciones son formas bilineales definidas sobre $\mathbb{R}^2$:

$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) \longrightarrow 3x_1x_2 - 4y_1y_2$

$g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) \longrightarrow x_1 + x_2 + y_1 + y_2$

$h: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) \longrightarrow x_1y_1 + x_1x_2 + x_2y_1 + x_1y_2$

$p: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) \longrightarrow x_1y_2 + y_1x_2$

$q: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) \longrightarrow (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2$

16. Averigua si

$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) \longrightarrow -3x_1y_2 + y_1x_2 + x_1y_2 + 2y_1y_2$

es una forma bilineal simétrica definida sobre $\mathbb{R}^2$.

17. Demuestra que

$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\left((x_1, y_1), (x_2y_2)\right) \longrightarrow x_1x_2 - y_1y_2 + x_1y_2$

es una forma bilineal no simétrica definida sobre $\mathbb{R}^2$.

3 Definición de producto escalar en un espacio vectorial real de dimensión dos

3.1. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial real de dimensión dos. *Se dice que sobre* $\mathbf{V}$ *está definido un producto escalar si se da una aplicación* $f: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que:*

a) **f es una forma bilineal simétrica definida sobre V,**

b) $\mathbf{f(\vec{u}, \vec{u}) > 0}$ **para todo** $\mathbf{\vec{u} \neq \vec{0}}$

En este caso, dados dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, su imagen $f(\vec{u}, \vec{v})$ recibe el nombre de producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ y se representa generalmente por $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Al utilizar esta forma de expresar el producto escalar de dos vectores, las propiedades a) y b) de f se traducen a las siguientes:

1) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}$

2) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}$

3) $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

4) $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

5) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{V}$

6) $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0 \quad \forall\, u \in \mathbf{V}$ tal que $\vec{u} \neq \vec{0}$

Ejemplos:

- Observa que si tomamos como espacio vectorial el espacio de los vectores libres del plano $(\mathbf{V}^2, +, \cdot\, \mathbb{R})$, el *producto escalar* que hemos definido en el tema 1 es efectivamente un producto escalar según la definición dada al principio de este apartado.

- Considera el espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot\, \mathbb{R})$.
  La aplicación $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
  $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longrightarrow x_1x_2 + y_1y_2$
  determina sobre $\mathbb{R}^2$ un producto escalar, ya que por **2.2.** es una forma bilineal simétrica, y si $(x, y) \neq (0, 0)$,
  $f((x, y), (x, y)) = x^2 + y^2 > 0$ por ser $x \neq 0$ o $y \neq 0$

3.2. *Se llama espacio vectorial euclídeo de dimensión dos a un par* $(\mathbf{V}, \cdot)$ *en donde* $\mathbf{V}$ *es un espacio vectorial real de dimensión dos y* $(\cdot)$ *es un producto escalar definido sobre él.*

18. Comprueba que la aplicación

$$f: \mathbf{V}^2 \times \mathbf{V}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \text{ si } \begin{cases} \vec{u} \neq \vec{0} \\ \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases} \\ 0 \text{ si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ó } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

es una forma bilineal simétrica definida sobre $\mathbf{V}^2$.

19. Averigua si la aplicación

$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longrightarrow x_1x_2$
definida sobre $\mathbb{R}^2$ es un producto escalar.

Ejemplos:

- El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y el producto escalar definido mediante la aplicación

$$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longrightarrow x_1x_2 + y_1y_2$$

  es un espacio vectorial euclídeo de dimensión dos.

- Como ya hemos visto (tema 1), el plano vectorial euclídeo es un espacio vectorial euclídeo de dimensión dos.

3.3. Dado un espacio vectorial euclídeo $(\mathbf{V}, \cdot)$ en donde el producto escalar $(\cdot)$ viene determinado por la forma bilineal simétrica

$$\mathbf{f}: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{u}, \vec{v}) \longrightarrow f(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

se dice que dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, son ortogonales si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, es decir, si $f(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Ejemplo:

- Considera el espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot\mathbb{R})$ y el producto escalar determinado por la forma bilineal

$$\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longrightarrow x_1x_2 + y_1y_2$$

  Los vectores (3,7) y (21, −9) son ortogonales. En efecto:

$$(3,7) \cdot (21, -9) = 3 \cdot 21 + 7 \cdot (-9) = 63 - 63 = 0$$

  Es de notar que los teoremas expuestos relativos a la ortogonalidad en el espacio vectorial de los vectores libres del plano $(\mathbf{V}^2, +, \cdot\mathbb{R})$ se pueden generalizar a un espacio vectorial euclídeo $(\mathbf{V}, \cdot)$, pudiéndose así definir también bases ortogonales en un espacio vectorial real $\mathbf{V}$ de dimensión dos.

20. Sea $(\mathbf{V}, \cdot)$ un espacio vectorial euclídeo. Demuestra que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, $\vec{u}$ y $\lambda\vec{v}$ son ortogonales para todo $\lambda \neq 0$.

21. Demuestra que si $(\mathbf{V}, \cdot)$ es un espacio vectorial euclídeo, el vector cero es ortogonal a cualquier otro vector $\vec{x}$.

Ejercicios y cuestiones

22. Sea f una forma lineal definida sobre $\mathbb{R}^2$ tal que $f(4,5) = 6$ y $f(3,2) = 7$.

Calcula $f(1,0)$ y $f(0,1)$. Halla la expresión general de la imagen de un elemento (x, y).

23. Sea f una forma lineal definida sobre $\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,0) = 3$ y $f(0,1) = 8$.

Calcula $f(5,7), f\big((7,8) + (9,12)\big), f\big((3,7) - (8,9)\big)$.

24. Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$ y sea f una forma lineal definida sobre $\mathbf{V}^2$ tal que

$f(\vec{e}_1) = 7, f(\vec{e}_2) = 12$.

Calcula $f\left(\dfrac{\vec{e}_1}{|\vec{e}_1|}\right), f\left(\dfrac{\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}\right), f\left(3\vec{e}_1 + \dfrac{4\vec{e}_2}{|\vec{e}_2|}\right)$

25. Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$ y sea f una forma lineal definida sobre $\mathbf{V}^2$ tal que

$f(\vec{e}_1) = 4, f(\vec{e}_2) = 8$.

Considera los vectores $\vec{a} = 4\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2$, $\vec{b} = 13\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2$ y $\vec{c} = \vec{e}_1 - 6\vec{e}_2$

y calcula $f(\vec{a} + \vec{b}), f(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}), f(\vec{a} + 3\vec{c}), f(4\vec{b} - 6\vec{c})$ y $f(3\vec{a} + 8\vec{b} - 12\vec{c})$

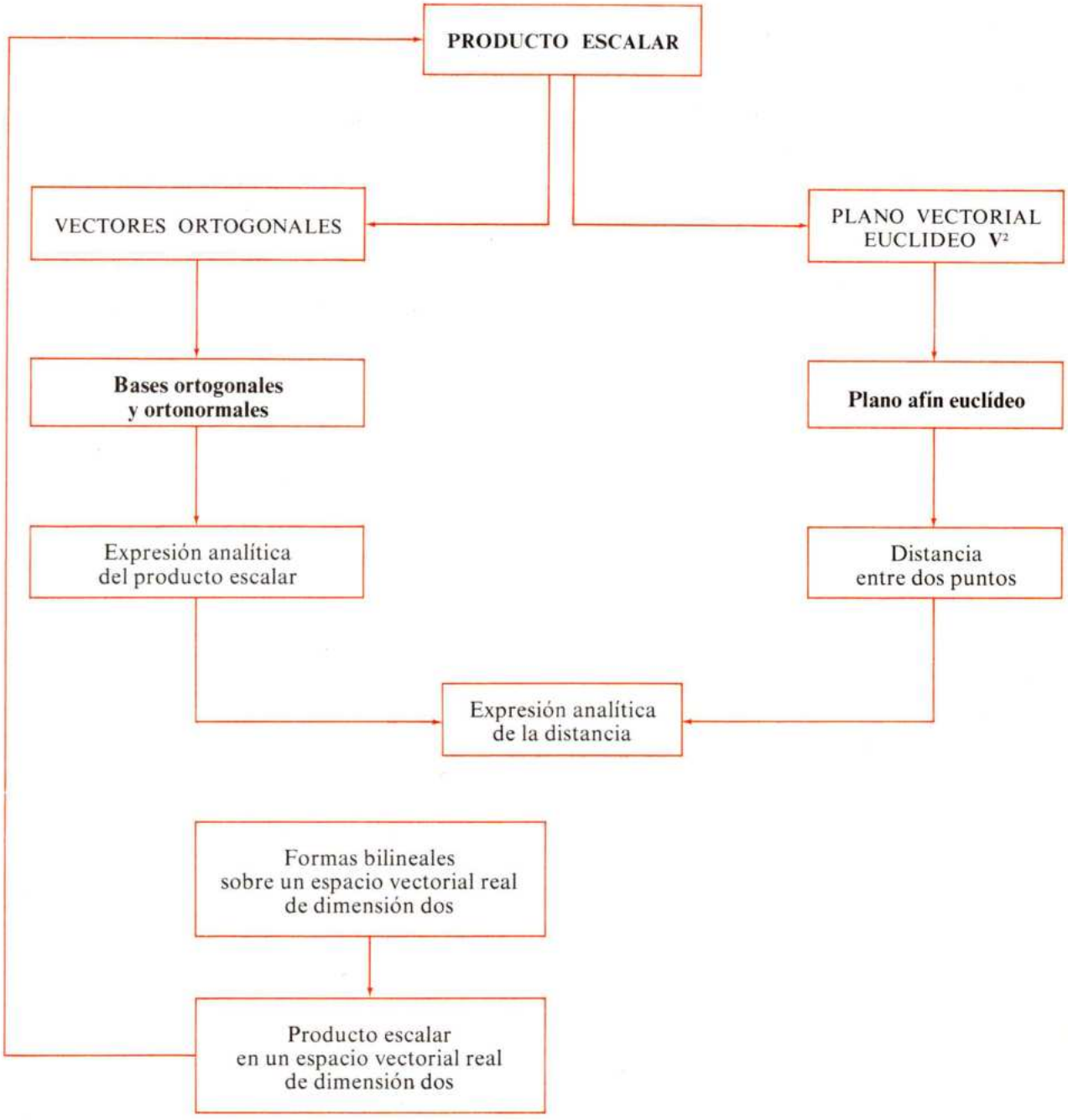
26. Sea $\mathbf{V}$ un espacio vectorial euclídeo y sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ y $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$.

Demuestra que el vector $\vec{u}$ es ortogonal a los vectores $\vec{v} + \vec{w}$ y $\vec{v} - \vec{w}$

27. Siguiendo la demostración dada en el tema 2, demuestra que dados dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, con $\vec{u} \neq \vec{0}$, de un espacio vectorial euclídeo $(\mathbf{V}, \cdot)$ de dimensión dos, existe un número real λ y un vector $\vec{w}$ tal que $\vec{v} = \lambda\vec{u} + w$, siendo $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$.

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD 1

PRODUCTO ESCALAR



Unidad 2 TRIGONOMETRIA

Después de un breve repaso de lo estudiado en el curso anterior sobre las funciones circulares: seno, coseno, tangente..., se estudian en esta Unidad las razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos. Para ello, y por indicarlo el programa oficial, hemos partido del producto escalar de dos vectores en vez de presentar las clásicas demostraciones geométricas.

La Unidad se completa con la exposición de teoremas relativos a las relaciones existentes entre los elementos de un triángulo, lo cual nos sirve de base para expresar sistemáticamente la resolución de triángulos en su forma general.

En cuanto a las ecuaciones trigonométricas, se presentan en esta Unidad sólo casos muy sencillos, dejando para la *Ampliación* el estudio de casos más complicados.

Tema 4

1. Reducción al primer cuadrante.
2. Teoremas de adición de ángulos.
3. Fórmulas del ángulo doble.
4. Fórmulas del ángulo mitad.
5. Transformación de sumas en productos.
6. Ecuaciones trigonométricas.

Tema 5

1. Relaciones entre los elementos de un triángulo.
2. Resolución de triángulos.
3. Aplicaciones prácticas de las relaciones entre los elementos de un triángulo.

Tema 4

TEOREMAS FUNDAMENTALES DE ADICION DE ANGULOS

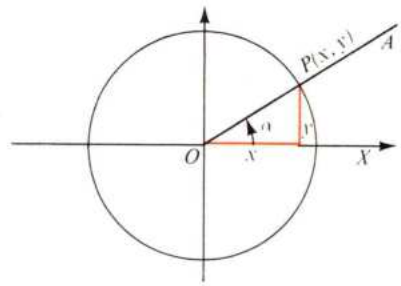
Vamos a ver en este tema cómo a partir de las razones trigonométricas de dos ángulos se obtienen las del ángulo suma y las del ángulo diferencia, que nos va a servir a su vez para calcular las razones trigonométricas del ángulo doble y las del ángulo mitad.

El producto escalar lo utilizaremos como base de las demostraciones, ya que el coseno del ángulo que forman dos vectores unitarios no es más que su producto escalar.

1 Reducción al primer cuadrante

1.1. Consideremos unos ejes de coordenadas cartesianas rectangulares de origen O. Con centro en O, tracemos una circunferencia de radio unidad; esta circunferencia se llama circunferencia goniométrica o circunferencia unidad.

Tomando como origen de ángulos el eje OX y como sentido el contrario al de giro de las agujas del reloj, las razones trigonométricas de un ángulo $\alpha = XOA$ vienen determinadas por las coordenadas (x, y) del punto de intersección de la semirrecta OA y la circunferencia unidad (Fig. 1).



(Fig. 1)

Así: $\operatorname{sen}\alpha = y$, $\cos\alpha = x$

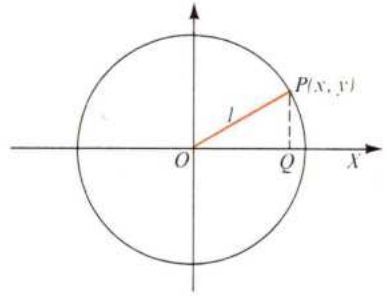
$$\textbf{Si} \quad \mathbf{x \neq 0}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\textbf{Si} \quad \mathbf{y \neq 0}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\textbf{Si} \quad \mathbf{x \neq 0}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\textbf{Si} \quad \mathbf{y \neq 0}, \quad \operatorname{cot}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Recuerda que la fórmula fundamental entre las razones trigonométricas de un ángulo α es $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ [1], la cual se prueba sin más que tener en cuenta que el triángulo OQP es rectángulo (Fig. 2) y que la hipotenusa es de longitud unidad.



(Fig. 2)

Si $\cos\alpha \neq 0$, dividimos los dos miembros de la igualdad [1] por $\cos^2\alpha$: $\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, de donde

$$\mathbf{\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha}$$

Ejercicios:

1. Determina el signo de las razones trigonométricas de un ángulo situado en el tercer cuadrante. Idem de uno situado en el segundo cuadrante.

2. Si la cotangente de un ángulo α es negativa, ¿entre qué valores puede variar α?

Si $\text{sen}\alpha \neq 0$, dividimos los dos miembros de la igualdad [1] por $\text{sen}^2\alpha$: $\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \dfrac{1}{\text{sen}^2\alpha}$, de donde

$$\mathbf{cot^2\alpha + 1 = \frac{1}{sen^2\alpha} = cosec^2\alpha}$$

1.2. *Razones de ángulos suplementarios*

Sea α un ángulo y $\pi - \alpha$ su suplementario. De acuerdo con la figura 3, los triángulos rectángulos OQP y $OQ'P'$ son iguales por tener iguales un lado ($\overline{OP} = \overline{OP'}$) y uno de los ángulos agudos $QOP = \alpha$; $P'OQ' = \pi - (\pi - \alpha) = \alpha$, por ello $\overline{QP} = \overline{Q'P'}$ y $\overline{OQ} = \overline{OQ'}$; por ser $\text{sen}\alpha = \overline{QP}$, $\cos\alpha = \overline{OQ}$, $\text{sen}(\pi - \alpha) = \overline{P'Q'}$ y $\cos(\pi - \alpha) = -\overline{OQ}$, resulta:

$$\begin{cases} \mathbf{sen}\ (\pi - \alpha) = \mathbf{sen}\ \alpha \\ \mathbf{cos}\ (\pi - \alpha) = -\mathbf{cos}\ \alpha \\ \mathbf{tg}\ (\pi - \alpha) = -\mathbf{tg}\ \alpha, \text{ (siempre que } \cos\alpha \neq 0) \end{cases}$$

Las igualdades anteriores son útiles cuando se desea calcular las razones trigonométricas de un ángulo del segundo cuadrante, ya que entonces el problema se reduce a hallar las de su suplementario en el primer cuadrante.

Ejemplo:

- Sea $\alpha = 125°$; entonces, por ser $180° - 125° = 55°$, se tiene:

  sen $125°$ = sen $55°$ = 0'8192 (Ver tablas al final del libro)

  cos $125°$ = $-$cos $55°$ = $-$0'5736

  tg $125°$ = $-$tg $55°$ = $-$1'4281

1.3. *Razones de ángulos que difieren en* π

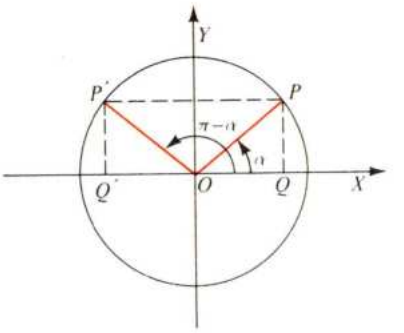
Sea α un ángulo; consideremos el ángulo $(\pi + \alpha)$ (Fig. 4). Los triángulos rectángulos OQP' y $OQ'P'$ son iguales por tener iguales un lado ($\overline{OP'} = \overline{OP}$) y uno de los ángulos agudos ($QOP = \alpha$; $Q'OP' = \pi + \alpha - \pi = \alpha$), en consecuencia:

$$\overline{PQ} = \overline{P'Q'} \text{ y } \overline{OQ} = \overline{OQ'}.$$

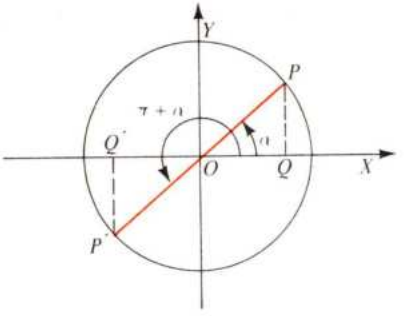
Si $\text{sen}\alpha = \overline{PQ}$, $\cos\alpha = \overline{OQ}$, $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\overline{P'Q'}$ y $\cos(\pi + \alpha) = -\overline{OQ'}$, resulta:

$$\begin{cases} \mathbf{sen}\ (\pi + \alpha) = -\mathbf{sen}\ \alpha \\ \mathbf{cos}\ (\pi + \alpha) = -\mathbf{cos}\ \alpha \\ \mathbf{tg}\ (\pi + \alpha) = \mathbf{tg}\ \alpha, \text{ siempre que } \cos\alpha \neq 0 \end{cases}$$

Estas relaciones permiten reducir el cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo del tercer cuadrante a las de un ángulo del primer cuadrante.



(Fig. 3)



(Fig. 4)

3. Demuestra que $\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. Demuestra que $\text{tg}\,\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

5. Calcula el valor del seno y de la tangente de un ángulo sabiendo que es agudo y que su coseno es 0'75.

6. Calcula las razones trigonométricas de un ángulo α sabiendo que $\sec\alpha = -45$ y que $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

7. Determina los valores que puede tomar $\text{sen}\alpha$ si $\cos\alpha = -0'6$. ¿A qué cuadrante puede pertenecer α?

8. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos de 135°, 120°, 150° 5', 162° 10', 171° 15' y 179° 20'.

Ejemplo:

- Sea $\alpha = 195°$; entonces, por ser $195° = 180° + 15°$, resulta:

  sen $195° = -$ sen $15° = -\ 0'2588$ (Ver tablas)

  cos $195° = -$ cos $15° = -\ 0'9659$

  tg $195° =$ tg $15° = 0'2979$

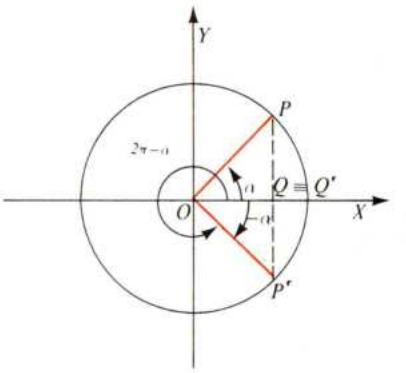
1.4. *Razones de ángulos opuestos*

Sea α un ángulo y $-\alpha$ su ángulo opuesto (Fig. 5). Los triángulos rectángulos OQP y $OQ'P'$ son iguales por tener iguales un lado ($\overline{OP} = \overline{OP'}$) y uno de los ángulos agudos ($QOP = \alpha$; $P'OQ' = 2\pi - (2\pi - \alpha) = \alpha$, por tanto: $Q = Q'$ y $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$.

Si $\text{sen}\alpha = \overline{PQ}$, $\cos\alpha = \overline{OQ}$, $\text{sen}(-\alpha) = -\overline{P'Q'}$ y $\cos(-\alpha) = \overline{OQ}$, resulta:

$$\begin{cases} \textbf{sen}\ (-\alpha) = -\ \textbf{sen}\ \alpha \\ \textbf{cos}\ (-\alpha) = \textbf{cos}\ \alpha \\ \textbf{tg}\ (-\alpha) = -\ \textbf{tg}\ \alpha, \text{ siempre que } \cos\alpha \neq 0 \end{cases}$$

Las relaciones anteriores permiten reducir el cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo del cuarto cuadrante a las de un ángulo del primer cuadrante.



(Fig. 5)

Ejemplo:

- Sea $\alpha = 316°20'$; entonces $360° - 316°20' = 43°40'$, y por tanto:

  sen $316°\ 20' = -$ sen $43°\ 40' = -0'6905$

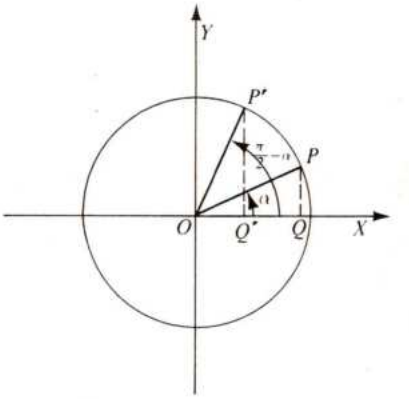
  cos $316°\ 20' =$ cos $43°\ 40' = 0'7234$

  tg $316°\ 20' = -$ tg $43°\ 40' = -\ 0'9545$

1.5. *Razones de ángulos complementarios*

Sean α un ángulo y $\frac{\pi}{2} - \alpha$ su ángulo complementario (Fig. 6).

Los triángulos rectángulos OQP y $P'Q'O$ son iguales por tener iguales un lado ($\overline{OP'} = \overline{OP}$) y uno de los ángulos agudos $\left(Q'OP' = \frac{\pi}{2} - \alpha;\ QPO = \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, por tanto: $\overline{PQ} = \overline{OQ'}$ y $\overline{OQ} = \overline{P'Q'}$.



(Fig. 6)

9. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

200°, 210° 15', 231° 45', 250° 30' y 265° 40'.

10. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos de 285°, 290° 10', 300°, 333° 30' y 335° 40'.

Por ser $\text{sen}\ \alpha = \overline{PQ}$, $\cos\alpha = \overline{QQ}$, $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \overline{P'Q'}$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \overline{OQ'}$, resulta:

$$\begin{cases} \textbf{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \textbf{cos}\ \alpha \\ \textbf{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \textbf{sen}\ \alpha \\ \textbf{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \textbf{cot}\alpha, \text{ siempre que } \cos\alpha \neq 0 \text{ y } \text{sen}\alpha \neq 0 \end{cases}$$

Estas relaciones permiten obtener las razones trigonométricas de cualquier ángulo del primer cuadrante conociendo únicamente las de ángulos menores que $\frac{\pi}{4}$.

Ejemplo:

- Sea $\alpha = 49°$; por ser $49° + 31° = 90°$,
  sen $49°$ = cos $31°$ = 0'8572
  cos $49°$ = sen $31°$ = 0'5150
  tg $49°$ = cot $31°$ = 1'6643

11. Sea α un ángulo del primer cuadrante y tal que $\text{tg}\alpha = 100$. Calcula las razones trigonométricas del ángulo complementario, del ángulo suplementario y del ángulo opuesto.

12. Expresa las razones trigonométricas de los ángulos de 48° 30', 59° 42', 63° 35', 82° 10' y 86° 15' en función de razones trigonométricas de ángulos menores que 45°.

2 Teoremas de adición de ángulos

2.1. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores unitarios (Fig. 7).

Llamando $\alpha = (\vec{a}, \vec{c})$ y $\beta = (\vec{a}, \vec{b})$, entonces: $\alpha - \beta = (\vec{b}, \vec{c})$

Por ser $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores unitarios,

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \cos(\vec{a}, \vec{c}) = \cos\alpha$

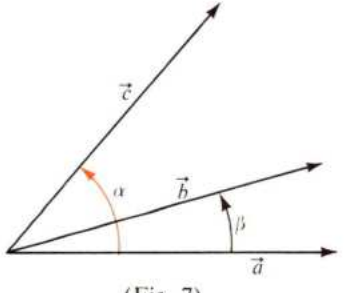
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos\beta$

$\vec{b} \cdot \vec{c} = \cos(\vec{b}, \vec{c}) = \cos(\alpha - \beta)$.

Consideremos los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$.

Según lo estudiado en el tema 2, sabemos que el vector $\vec{c}$ puede expresarse como $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \vec{c}_1$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{c}_1 \perp \vec{a}$, resulta $\lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}|^2} = \vec{a} \cdot \vec{c}$; en consecuencia:

$$\cos(\alpha - \beta) = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot (\lambda\vec{a} + \vec{c}_1) = \lambda\vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}_1 =$$
$$= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b} \cdot \vec{c}_1 = \cos\alpha \cos\beta + \vec{b} \cdot \vec{c}_1 \quad [1]$$



(Fig. 7)

Análogamente, para los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se tiene:

$$\vec{b} = \mu\vec{a} + \vec{b}_1, \text{ con } \mu \in \mathbb{R}, \vec{b}_1 \perp \vec{a} \quad \text{y} \quad \mu = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2} = \vec{a}\cdot\vec{b}$$

por tanto, $\vec{b}\cdot\vec{c}_1 = (\mu\vec{a} + \vec{b}_1)\cdot\vec{c}_1 = \mu\vec{a}\cdot\vec{c}_1 + \vec{b}_1\cdot\vec{c}_1 = \vec{b}_1\cdot\vec{c}_1$, por ser $\vec{a} \perp \vec{c}_1$

Por otra parte, $|\vec{c}_1| = |\vec{c} - \lambda\vec{a}| = +\sqrt{(\vec{c} - \lambda\vec{a})^2} =$

$$= +\sqrt{|\vec{c}|^2 - 2\,\lambda\vec{a}\cdot\vec{c} + \lambda^2|\vec{a}|^2} = +\sqrt{1 - 2(\vec{a}\cdot\vec{c})^2 + (\vec{a}\cdot\vec{c})^2} =$$

$$= +\sqrt{1 - (\vec{a}\cdot\vec{c})^2} = +\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = |\operatorname{sen}\alpha|$$

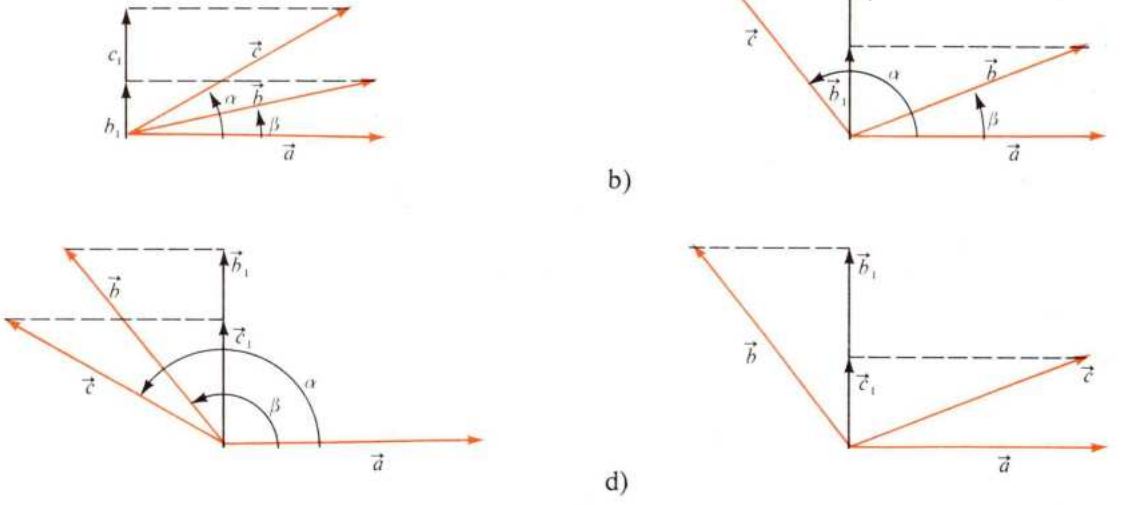
Análogamente, $|\vec{b}_1| = |\operatorname{sen}\beta|$. En consecuencia:

$$\vec{b}_1\cdot\vec{c}_1 = |\vec{b}_1||\vec{c}_1|\cos(\vec{b}_1, \vec{c}_1) = |\operatorname{sen}\alpha||\operatorname{sen}\beta|\cos(\vec{b}_1, \vec{c}_1)$$

Los vectores $\vec{b}_1$ y $\vec{c}_1$ son ortogonales al vector $\vec{a}$, luego, si ambos son no nulos, $\cos(\vec{b}_1, \vec{c}_1) = 1$ o $\cos(\vec{b}_1, \vec{c}_1) = -1$.

Veamos, pues, los siguientes casos:

1.º) *sen*$\alpha > 0$ y *sen*$\beta > 0$. En este caso, la posición de los vectores se ajusta a una de las representadas en (Fig. 8) y por ello los vectores $\vec{b}_1$ y $\vec{c}_1$ forman un ángulo nulo, luego $\cos(\vec{b}_1, \vec{c}_1) = 1$, de donde $\vec{b}_1\cdot\vec{c}_1 = \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta$



(Fig. 8)

2.º) $sen\alpha < 0$ y $sen\beta > 0$. En este caso, $|\text{sen}\alpha| = -\text{sen}\alpha$ y la posición de los vectores se ajusta a una de las representadas en la figura 9, y por ello los vectores $\vec{b}_1$ y $\vec{c}_1$ son tales que $(\vec{b}_1, \vec{c}_1) = \pi$, luego $\cos(\vec{b}_1, \vec{c}_1) = -1$, y por tanto:

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{c}_1 = (-\text{sen}\alpha)\,\text{sen}\beta\,(-1) = \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$$

3.º) $sen\alpha > 0$ y $sen\beta < 0$. En este caso, $|\text{sen}\beta| = -\text{sen}\beta$ y, como es fácil comprobar, $(\vec{b}_1, \vec{c}_1) = \pi$, luego $\cos(\vec{b}_1, \vec{c}_1) = -1$, y por tanto:

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{c}_1 = \text{sen}\alpha\,(-\text{sen}\beta)\,(-1) = \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$$

4.º) $sen\alpha < 0$ y $sen\beta < 0$. En este caso, $|\text{sen}\alpha| = -\text{sen}\alpha$, $|\text{sen}\beta| = -\text{sen}\beta$ y, como es fácil comprobar, $(\vec{b}_1, \vec{c}_1) = 0$, luego $\cos(\vec{b}_1, \vec{c}_1) = 1$, de donde

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{c}_1 = (-\text{sen}\alpha)\,(-\text{sen}\beta) = \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$$

Si uno de los vectores $\vec{b}_1$ o $\vec{c}_1$ es nulo, entonces $\vec{b}_1 \cdot \vec{c}_1 = 0$, y uno de los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ es ortogonal al vector $\vec{a}$, luego sen $\alpha = 0$ ó sen $\beta = 0$, por tanto:

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{c}_1 = \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta = 0.$$

En conclusión: para cualquiera de los casos, $\vec{b}_1 \cdot \vec{c}_1 = \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$. Sustituyendo en [1], resulta que:

$$\mathbf{cos}\,(\alpha - \beta) = \mathbf{cos}\,\alpha\,\mathbf{cos}\,\beta + \mathbf{sen}\,\alpha\,\mathbf{sen}\,\beta,$$

fórmula que expresa el coseno de la diferencia de dos arcos en función del seno y del coseno de ambos.

Ejemplos:

- $\cos\dfrac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\pi\cos\dfrac{\pi}{6} + \text{sen}\,\pi\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6} =$

$$= (-1)\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6} + \text{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{6} =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

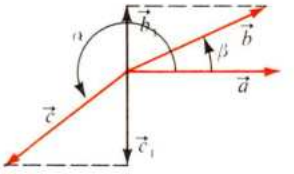
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} + \text{sen}\,\dfrac{\pi}{3}\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{4} =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

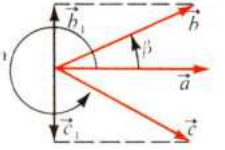
- $\cos(-\alpha) = \cos(0-\alpha) = \cos 0\cos\alpha + \text{sen}\,0\,\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha.$

- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\dfrac{\pi}{2}\cos\alpha + \text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\,\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha$

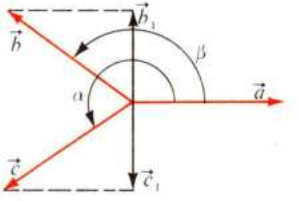
a)



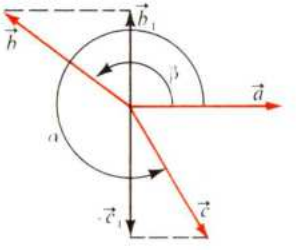
b)



c)



d)



(Fig. 9)

13. Calcula: a) $\cos\dfrac{5\pi}{3}$, b) $\cos\dfrac{11\pi}{6}$

14. Sabiendo que sen 6° = 0'1045 y cos 37° = = 0'7986, calcula: cos 31°, cos 8°, cos 39°, cos 7°, cos 84°, cos 53°, cos 54° y cos 23°.

15. Demuestra, según el apartado **2.1.**, que el coseno de un ángulo es igual al seno de su complementario.

2.2. *Coseno de una suma*

Sean α y β dos ángulos; entonces

$$\textbf{cos}\ (\alpha + \beta) = \textbf{cos}\ \alpha\ \textbf{cos}\ \beta - \textbf{sen}\ \alpha\ \textbf{sen}\ \beta$$

En efecto:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) =$$
$$= \cos\alpha\ \cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}(-\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta$$

Ejemplos:

- $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} =$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

- $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} =$
$$= -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\pi\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$
$$= -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $\cos(\pi + \alpha) = \cos\pi\cos\alpha - \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\alpha = -\cos\alpha$

2.3. *Seno de una suma*

Sean α y β dos ángulos; entonces

$$\textbf{sen}\ (\alpha + \beta) = \textbf{sen}\ \alpha\ \textbf{cos}\ \beta + \textbf{cos}\ \alpha\ \textbf{sen}\ \beta$$

En efecto:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{sen}\beta =$$
$$= \operatorname{sen}\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta$$

Ejemplos:

- $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} =$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

- $\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\pi\cos\frac{\pi}{3} + \cos\pi\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} =$
$$= \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

16. Calcula: $\cos\frac{4\pi}{3}$, $\cos\frac{7\pi}{6}$, $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\cos\frac{7\pi}{4}$

17. Sea el ángulo α tal que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\operatorname{sen}\alpha = 0'5$, el ángulo β tal que $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ y $\cos\beta = \frac{3}{5}$

Calcula $\cos(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha - \beta)$.

18. Sea α un ángulo tal que $\operatorname{tg}\alpha = -12$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Calcula $\cos(\pi + \alpha)$.

19. Calcula: $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$, $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}$, $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$, $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$

20. Deduce las expresiones $\operatorname{sen}(\alpha + \beta + \gamma)$ y $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$ en función de los senos y cosenos de α, β y γ.

• $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} =$

$$= \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

• $\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = \operatorname{sen}\pi\cos\alpha + \cos\pi\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\alpha$

2.4. *Seno de la diferencia*

Sean α y β dos ángulos; entonces

$$\textbf{sen}(\alpha - \beta) = \textbf{sen}\alpha\ \textbf{cos}\ \beta - \textbf{cos}\alpha\ \textbf{sen}\ \beta$$

En efecto:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha + (-\beta)) =$$
$$= \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta) =$$
$$= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Ejemplos:

• $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

• $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\pi\cos\frac{\pi}{3} - \cos\pi\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} =$

$$= -(-1)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.5. *Tangente de una suma*

Sean α y β dos ángulos cuyas tangentes estén definidas y tales que $\operatorname{tg}\alpha \neq \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$; entonces

$$\textbf{tg}\ (\alpha+\beta) = \frac{\textbf{tg}\ \alpha + \textbf{tg}\ \beta}{\mathbf{1} - \textbf{tg}\ \alpha\ \textbf{tg}\ \beta}$$

En efecto:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Dividiendo numerador y denominador por $\cos\alpha\cos\beta$, resulta:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

21. Sean α y β dos ángulos tales que $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{sen}\beta = \frac{2}{7}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

Calcula:

$\operatorname{sen}(\pi+\alpha)$, $\operatorname{sen}(\pi+\beta)$, $\cos(\pi+\alpha)$, $\cos(\pi+\beta)$, $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\beta-\alpha)$.

22. Calcula: $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$, $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

23. Sean α y β dos ángulos menores que $\frac{\pi}{2}$ tales que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{4}$ y $\cos\beta = 0'6$.

Calcula $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$

24. Demuestra, según **2.4.**, que $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$.

Ejemplos:

- $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}=$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{(1-\sqrt{3})^2}{1-3}=\frac{(1+\sqrt{3})^2}{-2}$$

- $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\dfrac{\operatorname{tg}\pi+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\pi\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$

2.6. *Tangente de una diferencia*

Sean α y β dos ángulos cuyas tangentes estén definidas y tales que $\operatorname{tg}\alpha \neq -\dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta}$; entonces

$$\mathbf{tg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\mathbf{tg}\,\alpha-\mathbf{tg}\,\beta}{\mathbf{1}+\mathbf{tg}\,\alpha\,\mathbf{tg}\,\beta}$$

En efecto:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}\big(\alpha+(-\beta)\big)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Ejemplos:

- $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{1-3}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{-2}$$

- $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=\dfrac{\operatorname{tg}\pi-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\pi\operatorname{tg}\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha$

25. Calcula: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$

26. Sean α y β dos ángulos tales que $\operatorname{tg}\alpha=12$ y $\operatorname{tg}\beta=-14$. Calcula $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

27. Calcula $\operatorname{tg}15^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ-30^\circ)$.

28. Calcula $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$

29. Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$ y $\operatorname{tg}\beta=-\frac{1}{7}$, calcula $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ y $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

30. Sabiendo que α y β son ángulos menores que $\frac{\pi}{2}$, que $\operatorname{tg}\alpha=4$ y $\operatorname{tg}\beta=8$, calcula:

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$ y $\cos(\alpha-\beta)$.

3 Fórmulas del ángulo doble

3.1. Sea α un ángulo; entonces

$$\mathbf{sen}\ 2\alpha=\mathbf{2}\ \mathbf{sen}\ \alpha\ \mathbf{cos}\ \alpha$$
$$\mathbf{cos}\ 2\alpha=\mathbf{cos}^2\ \alpha-\mathbf{sen}^2\ \alpha$$

En efecto:

$\operatorname{sen}2\alpha=\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

y

$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$

Ejemplo:

- Sea α un ángulo tal que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$ y $\cos\alpha = \frac{-3}{5}$; entonces:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \left(\frac{-3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{-7}{25}$$

3.2. Sea α un ángulo cuya tangente esté definida y tal que $|\operatorname{tg}\alpha| \neq 1$; entonces:

$$\mathbf{tg\ 2}\,\alpha = \frac{\mathbf{2\ tg}\,\alpha}{\mathbf{1 - tg^2}\,\alpha}$$

En efecto:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Ejemplos:

- $\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$

- Si $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, entonces

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{24}{7}$$

- $\operatorname{tg}(3\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha + 2\alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha} =$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}}{1 - \operatorname{tg}\alpha \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) + 2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

(La fórmula anterior es válida siempre que $\operatorname{tg}\alpha$ esté definida y $3\operatorname{tg}^2\alpha \neq 1$).

- Si $\operatorname{tg}\alpha = 2$, entonces

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3 \cdot 2 - 8}{1 - 3 \cdot 4} = \frac{6 - 8}{1 - 12} = \frac{-2}{11} = \frac{2}{11}$$

31. Sea α un ángulo menor que $\frac{\pi}{2}$ y tal que $\operatorname{tg}\alpha = 7$. Calcula $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$.

32. Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{7}$ y que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcula $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$.

33. ¿Cuál es el valor de $\operatorname{sen} 2\alpha$ siendo $\operatorname{tg}\alpha = 0'35$ y $\alpha < \frac{\pi}{2}$? ¿Cuál es el valor de $\cos 2\alpha$?

34. Demuestra que, si α es un ángulo,

$$\operatorname{sen} 3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$$

y que $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

35. Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{5}$, calcula $\operatorname{tg} 2\alpha$.

36. Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{7}{3}$ y que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcula $\operatorname{sen} 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ y $\operatorname{tg} 2\alpha$.

37. Calcula $\operatorname{sen} 2a$, $\cos 2a$ y $\operatorname{tg} 2a$ siendo $\operatorname{tg}\alpha = 8$ y $a < \frac{\pi}{2}$.

38. Sean a y b dos ángulos tales que $\operatorname{tg} a = \frac{4}{5}$, $\cos b = -\frac{3}{7}$, $a < \frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} < b < \pi$. Calcula: $\operatorname{sen} 2a$, $\cos 2a$, $\operatorname{tg} 2a$, $\operatorname{sen} 2b$, $\cos 2b$, $\operatorname{tg} 2b$, $\operatorname{sen}(a + b)$, $\cos(a + b)$, $\operatorname{tg}(a + b)$, $\operatorname{sen}(a - b)$, $\cos(a - b)$ y $\operatorname{tg}(a - b)$.

4 Fórmulas del ángulo mitad

Sea α un ángulo; entonces:

a) $\textbf{sen}\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{1-\cos\alpha}}{\mathbf{2}}}$

b) $\textbf{cos}\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{1+\cos\alpha}}{\mathbf{2}}}$

c) $\textbf{tg}\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{1-\cos\alpha}}{\mathbf{1+\cos\alpha}}}$, siempre que $\cos\alpha \neq -1$

Demostremos la fórmula a):

Por ser $\alpha = 2\,\frac{\alpha}{2}$, $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

Por otra parte, $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$, por tanto:

$1 - \cos\alpha = 2\,\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$, de donde $\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Ejemplos:

- $\text{sen}\,\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

- $\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

- $\text{tg}\,\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 2-\sqrt{3}$

39. Demuestra las igualdades b) y c) del apartado **4.**

40. Calcula: $\text{sen}\,\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{8}$ y $\text{tg}\,\frac{\pi}{8}$

41. Calcula: $\text{sen}\,\frac{\pi}{16}$, $\cos\frac{\pi}{16}$ y $\text{tg}\,\frac{\pi}{16}$.

5 Transformación de sumas en productos

5.1. Sean α y β dos ángulos; entonces

a) $\textbf{sen}\ \alpha + \textbf{sen}\ \beta = \mathbf{2}\ \textbf{sen}\ \frac{\alpha+\beta}{2}\ \textbf{cos}\ \frac{\alpha-\beta}{2}$

b) $\textbf{sen}\ \alpha - \textbf{sen}\ \beta = \mathbf{2}\ \textbf{cos}\ \frac{\alpha+\beta}{2}\ \textbf{sen}\ \frac{\alpha-\beta}{2}$

Demostremos la primera igualdad:

Por ser $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}$ y $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}$, resulta:

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta-\alpha}{2}$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades anteriores y teniendo en cuenta que $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\frac{\beta-\alpha}{2}$ y que $\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2} = -\operatorname{sen}\frac{\beta-\alpha}{2}$, se tiene que

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

como queríamos demostrar.

Ejemplos:

- $\operatorname{sen} 40^\circ + \operatorname{sen} 20^\circ = 2\operatorname{sen}\frac{40+20}{2}\cos\frac{40-20}{2} =$

$$= 2\operatorname{sen}\frac{60}{2}\cos\frac{20}{2} = 2\operatorname{sen} 30^\circ\cos 10^\circ = 2\,\frac{1}{2}\cos 10^\circ = \cos 10^\circ$$

- $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = 2\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}}{2} =$

$$= 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12} = 2\,\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12} =$$

$$= +\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = +\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2} + \sqrt{2+3}$$

- $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = 2\cos\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}}{2} =$

$$= 2\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \sqrt{3} + \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

42. Calcula: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{32}$, $\cos\frac{\pi}{32}$ y $\operatorname{tg}\frac{\pi}{32}$

43. Demuestra la igualdad b) del subapartado **5.1.**

44. Como aplicación de las fórmulas de **5.1.**, calcula $\operatorname{sen} 105^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ$ y $\operatorname{sen} 105^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ$.

45. Transforma la expresión $1 + \operatorname{sen}\alpha$ en producto.

5.2. Sean α y β dos ángulos; entonces

a) $\mathbf{\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$

b) $\mathbf{\cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}}$

Demostremos la igualdad a):

Por ser $\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}$ y $\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2}$, se tiene:

$$\cos \alpha = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \beta = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Sumando miembro a miembro las dos anteriores igualdades y teniendo en cuenta que

$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$ y que $\operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2} = -\operatorname{sen} \frac{\beta - \alpha}{2}$, resulta:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Ejemplo:

- $\cos \frac{3\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} = 2 \cos \frac{\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{8}}{2} \cos \frac{\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8}}{2} =$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8}$$

5.3. Sean α y β dos ángulos tales que $\operatorname{sen} \alpha \neq \operatorname{sen} \beta$; entonces

$$\frac{\mathbf{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}}{\mathbf{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta}} = \frac{\mathbf{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}}{\mathbf{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}}$$

En efecto:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

46. Demuestra la igualdad b) del apartado **5.2.**

47. Transforma las expresiones $1 + \cos \alpha$ y $1 - \cos \alpha$ en producto.

48. Calcula $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$ como aplicación de **5.2.**

49. Calcula $\frac{\operatorname{sen} 66^\circ 40' + \operatorname{sen} 23^\circ 20'}{\operatorname{sen} 66^\circ 40' - \operatorname{sen} 23^\circ 20'}$

50. Calcula $\frac{\operatorname{sen} 56^\circ + \operatorname{sen} 4^\circ}{\operatorname{sen} 56^\circ - \operatorname{sen} 4^\circ}$

6 Ecuaciones trigonométricas

Las identidades goniométricas que acabas de estudiar en los apartados anteriores permiten hallar la solución de algunas ecuaciones en las que intervienen razones trigonométricas.

Veamos algunas.

Ejemplos:

- Vamos a resolver la ecuación $\cos 2x = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Entonces

  $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \Rightarrow$

  $\Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x\,(1 + \operatorname{sen} x) \Rightarrow (1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x) =$

  $= \operatorname{sen} x\,(1 + \operatorname{sen} x)$.

  La igualdad se verifica si

  a) $1 + \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}$

  b) $1 - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \operatorname{sen} x \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ (Fig. 10)

  Por tanto, la ecuación dada tiene las soluciones:

  $$x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6}$$

- Resolvamos la ecuación $\operatorname{sen} 2x \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x$ en el intervalo $[0,2\pi]$

  Entonces $2 \operatorname{sen} x \cos x \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x \Rightarrow \operatorname{sen} x \cos^2 x =$

  $= 3 \operatorname{sen}^3 x \Rightarrow \operatorname{sen} x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 3 \operatorname{sen}^3 x \Rightarrow \operatorname{sen} x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x) =$

  $= 3 \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x$

  La igualdad se verifica si:

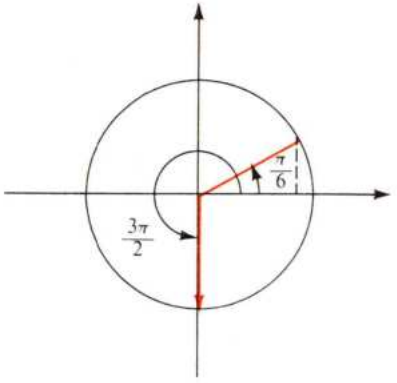
  a) $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 180°$

  b) $1 - \operatorname{sen}^2 x = 3 \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \dfrac{1}{4} = \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \dfrac{1}{2}$

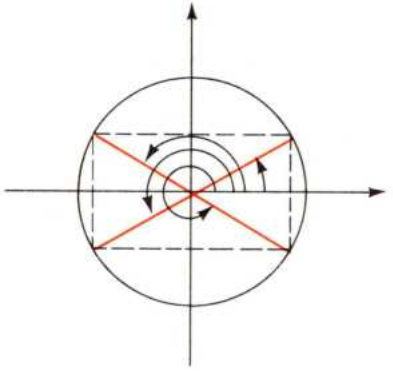
  $$\text{Si } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° \\ x = 150° \end{cases}$$

  $$\text{Si } \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 210° \\ x = 330° \text{ (Fig. 11)} \end{cases}$$

Nota: Para mayor detalle, consultar la *Ampliación* al final del libro.



(Fig. 10)



(Fig. 11)

51. Resuelve la ecuación $\operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$ en el intervalo $[0,2\pi]$.

52. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica.

$6 \cos^2 \dfrac{x}{2} + \cos x - 1 = 0$ en el intervalo $[0,2\pi]$

53. Resuelve la ecuación $2 \operatorname{sen} x + 2 \cos x = \sqrt{2}$

Ejercicios y cuestiones

54. Halla un ángulo menor que 90° cuya cotangente sea igual al coseno de 17° 15'.

55. Simplifica la siguiente expresión: $\cos(\pi - a)\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + b\right) + \text{sen}(\pi - a)\cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right)$

56. Demuestra que si $A + B + C = \pi$, se verifica $\text{tg}\,A + \text{tg}\,B + \text{tg}C = \text{tg}\,A\,\text{tg}B\,\text{tg}\,C$.

57. Demuestra que $\frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)} = \text{tg b}$

58. Demuestra que si $a + b = \frac{\pi}{2}$, entonces $(\text{sen}a + \text{sen}b)(\cos a + \cos b) = 1 + \text{sen}2a$.

59. Razona por qué si A, B y C son los ángulos de un triángulo, $\text{tg}(A + B) + \text{tg}C = 0$.

60. Simplifica la siguiente expresión: $(\cot a - \text{tg}\,a)\left[tg\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right)\right]$

61. Sabiendo que $\text{sen}\,30° = \frac{1}{2}$, calcula sin hacer uso de las tablas el valor de

$$\frac{\text{sen}\,75° - \text{sen}\,15°}{\cos 75° + \cos 15°}\,\text{tg}\,30°$$

62. ¿Tiene alguna solución la ecuación $\text{sen}x + \cos x = \frac{5}{2}$?

63. Resuelve la ecuación $\text{tg}x = 2\,\text{sen}x$ en el intervalo $[0, \pi[$.

64. Demuestra la identidad $\text{sen}\,2x = \frac{2\,\text{tg}x}{1 + \text{tg}^2 x}$

65. Calcula $\frac{\cos 43° + \cos 17°}{\cos 13°}$

66. Convierte en producto las siguientes sumas: $1 + \text{sen}\,68°$, $\text{sen}\,36° + \cos 24°$.

67. Sabiendo que $\text{tg}(\alpha + \beta) = 4$ y $\text{tg}\,\alpha = -2$, calcula $\text{tg}\,2\beta$ y $\text{tg}(\alpha - \beta)$.

Tema 5 RESOLUCION DE TRIANGULOS Y APLICACIONES

La resolución de triángulos, objeto de este tema, es un problema clásico de la geometría plana, y consiste en determinar tres elementos de un triángulo conocidos los otros tres.

Se inicia el tema con la exposición de las relaciones existentes entre los elementos de un triángulo, para a continuación estudiar de forma sistemática los diversos casos de resolución de triángulos. Finalmente, por ser éste un problema con claras aplicaciones prácticas, sobre todo en topografía, hemos presentado diversos casos entre los más típicos.

1 Relaciones entre los elementos de un triángulo

1.1. *Teorema del coseno*

Consideremos un triángulo ABC (Fig. 1).

Si llamamos $\vec{c} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{AC}]$ y $\vec{a} = [\overrightarrow{BC}]$, resulta $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ y por tanto:

$$|\vec{a}|^2 = (\vec{b} - \vec{c})^2 = \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 2\,\vec{b}\cdot\vec{c} =$$
$$= |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos(\vec{b}, \vec{c})$$

Por ser $(\vec{b}, \vec{c}) = A$, se tiene:

$$\mathbf{|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2|\vec{b}||\vec{c}|\cos A,}$$

expresión que se conoce con el nombre de *Teorema del coseno* o Teorema de Pitágoras generalizado.

Llamando $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$ y $c = |\vec{c}|$, tenemos:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A.}$$

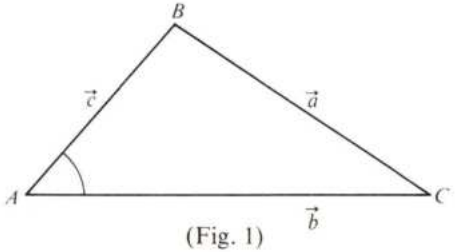
Ejemplo:

- Del triángulo ABC de la figura 2 se sabe que $A = \frac{\pi}{3}$, $a = 8$ cm y $c = 7$ cm. Calculemos el lado b.

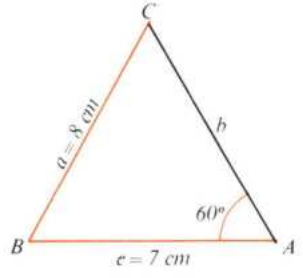
  Por el Teorema del coseno: $8^2 = b^2 + 7^2 - 2\cdot 7\cdot b\cos\frac{\pi}{3}$,

  de donde $b^2 - 7b - 15 = 0$

$$b = \frac{+7 \pm \sqrt{49 + 60}}{2} = \frac{7 \pm 10'44}{2} = 8'72 \text{ cm.}$$



(Fig. 1)



(Fig. 2)

Ejercicios:

1. Justifica el Teorema de Pitágoras a partir del Teorema del coseno.
2. De un triángulo ABC se sabe que $b = 16$ cm, $c = 15$ cm y $A = 70°$. Calcula el lado a.
3. De un triángulo ABC se sabe que $A = \frac{\pi}{4}$, $a = 14$ cm y $b = 6$ cm. Calcula el lado c.

1.2. *Teorema de los senos*

En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos, es decir

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sen\ A}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sen\ B}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sen\ C}} \text{ (Fig. 3)}$$

Para demostrarlo consideremos los siguientes casos:

Primer caso. El triángulo es acutángulo

Sea $\overline{BD}$ la altura correspondiente al vértice B (Fig. 4); entonces: $\overline{BD} = a\ \text{sen}C$ por ser $\overline{BD}$ un cateto del triángulo rectángulo BDC, y $\overline{BD} = c\ \text{sen}\ A$ por ser $\overline{BD}$ un cateto del triángulo rectángulo ADB; luego:

$$a\ \text{sen}\ C = c\ \text{sen}\ A, \text{ de donde } \frac{a}{\text{sen}\ A} = \frac{c}{\text{sen}\ C}$$

Análogamente, por medio de la altura $\overline{AP}$ correspondiente al vértice A se obtiene $\dfrac{c}{\text{sen}\ C} = \dfrac{b}{\text{sen}\ B}$

En consecuencia: $\dfrac{a}{\text{sen}\ A} = \dfrac{b}{\text{sen}\ B} = \dfrac{c}{\text{sen}\ C}$

Segundo caso. El triángulo es obtusángulo

Supongamos que C es el ángulo obtuso del triángulo ABC y que $\overline{BD}$ es la altura correspondiente al vértice B (Fig. 5)

En el triángulo rectángulo BDA tenemos que $\overline{BD} = c\ \text{sen}\ A$, y en el triángulo rectángulo BDC, $\overline{BD} = a\ \text{sen}\ DCB$. Por ser los ángulos C y DCB suplementarios, sen C = sen DCB; por tanto:

$c\ \text{sen}\ A = a\ \text{sen}\ C$, de donde $\dfrac{c}{\text{sen}\ C} = \dfrac{a}{\text{sen}\ A}$

De la misma forma, trazando la altura correspondiente al vértice A se obtiene $\dfrac{c}{\text{sen}\ C} = \dfrac{b}{\text{sen}\ B}$; en consecuencia:

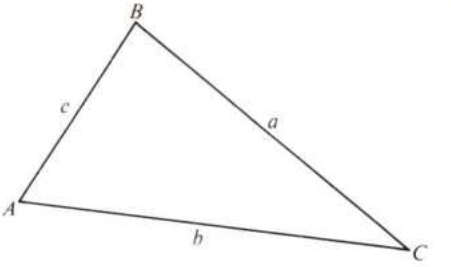
$$\frac{a}{\text{sen}\ A} = \frac{b}{\text{sen}\ B} = \frac{c}{\text{sen}\ C}$$

Tercer caso. El triángulo es rectángulo

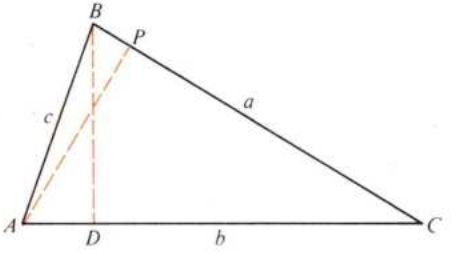
Si A es el ángulo recto del triángulo ABC (Fig. 6),

$a = \dfrac{b}{\text{sen}\ B} = \dfrac{c}{\text{sen}\ C}$. Por ser $\text{sen}\ A = \text{sen}\ \dfrac{\pi}{2} = 1$, resulta:

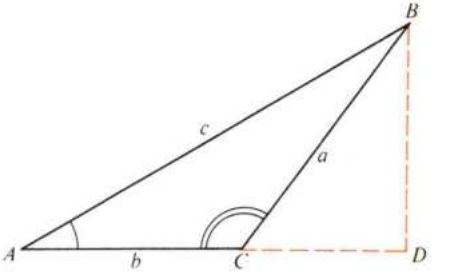
$$\frac{a}{\text{sen}\ A} = \frac{b}{\text{sen}\ B} = \frac{c}{\text{sen}\ C}$$



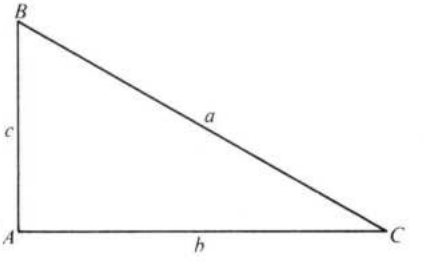
(Fig. 3)



(Fig. 4)



(Fig. 5)



(Fig. 6)

Ejemplo:

- De un triángulo ABC se conoce $A = 72°$, $B = 31°$ y $a = 12$ cm. Calculemos el lado b.

  Por el Teorema de los senos: $\frac{12}{\text{sen } 72°} = \frac{b}{\text{sen } 31°}$, de donde

$$b = \frac{0'5150 \cdot 12}{0'9511} = 6'50 \text{ cm.}$$

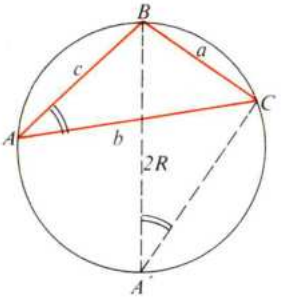
1.3. *Interpretación geométrica del Teorema de los senos*

Sea el triángulo ABC de la figura 7 inscrito en la circunferencia de radio R. Por el punto C trazamos la cuerda CA' perpendicular a BC, entonces el triángulo $A'CB$ es recto en C, por ello, al ser C un ángulo inscrito, $A'B = 2R$. Por otra parte, los ángulos inscritos A y A' abarcan el mismo arco BC, luego son iguales; entonces:

$$\text{sen } A = \text{sen } A' = \frac{a}{2R}, \text{ de donde } \frac{a}{\text{sen } A} = 2R$$

En consecuencia: $\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = \frac{a}{\text{sen } A} = 2R$

En todo triángulo la razón de un lado al seno del ángulo opuesto es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita.



(Fig. 7)

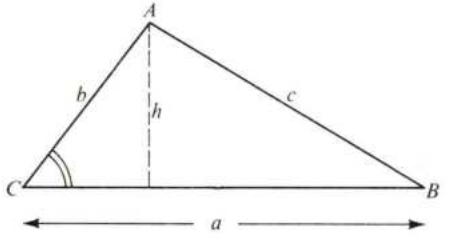
Ejemplos:

- Considera el triángulo ABC de la figura 8. Su área S es:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot b \text{ sen } C$$

  Por ser sen $C = \frac{c}{2R}$, siendo R el radio de la circunferencia circunscrita, resulta: $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$

  expresión del área de un triángulo en función de sus lados y del radio de la circunferencia circunscrita.



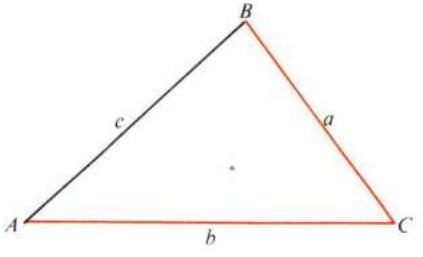
(Fig. 8)

1.4. *Teorema de Neper o de las tangentes*

En todo triángulo ABC se verifica (Fig. 9):

$$\frac{\mathbf{a-b}}{\mathbf{a+b}} = \frac{\mathbf{tg}\,\frac{\mathbf{A-B}}{\mathbf{2}}}{\mathbf{tg}\,\frac{\mathbf{A+B}}{\mathbf{2}}} \qquad [1]$$

En efecto: por ser $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$, resulta $\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } A}{\text{sen } B}$, y por tanto, $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\text{sen } A - \text{sen } B}{\text{sen } A + \text{sen } B}$.



(Fig. 9)

4. Calcula el lado c del triángulo ABC del ejemplo del apartado **1.2.**

5. Halla el área de un triángulo ABC sabiendo que $b = 28$ cm, $A = 49°$ y $B = 73°$.

6. Calcula el área de un triángulo ABC sabiendo que $a = 43$ cm, $C = 48°$ y $B = 79°$

Transformando las sumas del numerador y del denominador del segundo miembro de la igualdad, se tiene:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}, \text{ de donde } \frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}$$

Ejemplos:

- En un triángulo ABC, $a = 17$ cm, $b = 13$ cm y $A - B = 12°$

  Vamos a calcular los ángulos A y B. Por el Teorema de las tangentes, se tiene:

$$\frac{17-13}{17+13}=\frac{\operatorname{tg}\frac{12°}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}, \text{ de donde } \operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\frac{30\cdot 0'1051}{4}=0'7883;$$

  por tanto, $\frac{A+B}{2}=38°\ 15'$ y $A+B=76°\ 30'$; en consecuencia:

$$A = 44°\ 15' \quad \text{y} \quad B = 32°\ 15'$$

1.5. Si en la igualdad [1] despejamos $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}$, resulta:

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}. \text{ Como } A+B=\pi-C,$$

$\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$; por ello, $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}=\cot\frac{C}{2}$, de donde

$$\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

Del mismo modo:

$$\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}=\frac{a-c}{a+c}\cot\frac{B}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

Ejemplos:

- En un triángulo ABC, $A - B = 17°\ 20'$, $a = 19$ cm y $b = 12$ cm. Calculemos el ángulo C:

$$\operatorname{tg}\frac{17°\ 20'}{2}=\frac{19-12}{19+12}\cot\frac{C}{2}, \text{ de donde}$$

$$\cot\frac{C}{2}=\frac{31\cdot 0'1524}{7}=0'6749; \text{ por tanto,}$$

$$\frac{C}{2}=34°\ 1', \text{ luego } C = 68°\ 2'$$

7. En un triángulo ABC, $b = 42$ cm, $c = 25$ cm y $B + C = 94°$. Calcula los ángulos B y C.

8. En un triángulo ABC, $A = 94°$, $B = 36°$ y $a + b = 30$ cm. Calcula los lados a y b.

9. Sea el triángulo ABC tal que $B - C = 12°$, $b = 52$ cm y $c = 49$ cm. Calcula los ángulos A, B y C.

2 Resolución de triángulos

Como para determinar un triángulo es preciso conocer tres de sus elementos, entre los cuales debe figurar al menos un lado, existen cuatro casos posibles de resolución de triángulos.

2.1. *Caso I.* Resolución de un triángulo conocidos dos lados y el ángulo comprendido.

Supongamos el triángulo ABC (Fig. 10), en donde $b = 9$ cm, $c = 7$ cm y $A = 44°$. Para el cálculo de los ángulos B y C y del lado a procedemos de la siguiente manera:

a) Cálculo de B y C:

$$\frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\text{; como } A = 44°, \frac{B+C}{2} = 68°$$

Por otra parte, $\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$

Por ser $b - c = 2$, $b + c = 16$ y $\frac{A}{2} = 22°$, se tiene:

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{2}{16} \cot 22° = \frac{1}{8} \cot 22° = \frac{1}{8} \cdot 2'4751 = 0'3094,$$

de donde $\frac{B-C}{2} = 17° 12'$

Como $B = \frac{B+C}{2} + \frac{B-C}{2}$ y $C = \frac{B+C}{2} - \frac{B-C}{2}$, resulta:

$B = 85° 12'$ y $C = 50° 48'$

b) Cálculo de a:

Por el Teorema del coseno, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A =$
$= 81 + 49 - 126 \cos 44° = 81 + 49 - 126 \cdot 0'71 \cdot 93 =$
$= 39'37 \Rightarrow a = 6'27$ cm.

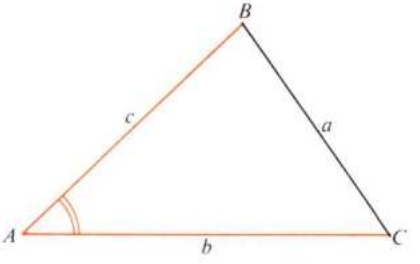
2.2. *Caso II.* Resolución de un triángulo conocidos dos ángulos y un lado.

Supongamos el triángulo ABC (Fig. 11), en donde $A = 48°$, $B = 64°$ y $c = 10$ cm.

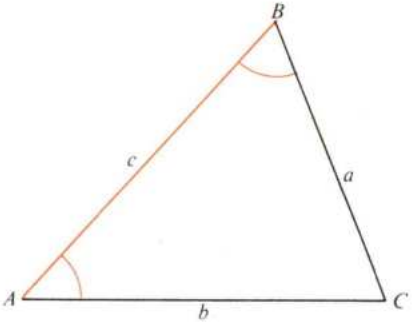
Para determinar el ángulo C y los lados a y b procedemos de la siguiente forma:

a) Cálculo de C:

$$C = \pi - (A + B)\text{, luego } C = 68°$$



(Fig. 10)



(Fig. 11)

10. Calcula los ángulos B y C y el lado a de un triángulo ABC sabiendo que $b = 12$ cm, $c = 7$ cm y $A = 76°$

11. Sea el triángulo ABC tal que $a = 20$ cm, $b = 35$ cm y $C = 80°$. Calcula los ángulos A y B y el lado c.

b) Cálculo de a y c:

Por el Teorema del seno, $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} = \frac{b}{\text{sen } B}$, de donde

$$a = \frac{c \text{ sen } A}{\text{sen } C} = \frac{10 \cdot \text{sen } 48^\circ}{\text{sen } 68^\circ} = \frac{10 \cdot 0'7431}{0'9272} = 8'01 \text{ cm.}$$

Análogamente:

$$b = \frac{c \text{ sen } B}{\text{sen } C} = \frac{10 \cdot \text{sen } 64^\circ}{\text{sen } 68^\circ} = \frac{10 \cdot 0'8988}{0'9272} = 9'69 \text{ cm}$$

2.3. *Caso III.* Resolución de un triángulo conocidos sus tres lados.

Sea el triángulo ABC con $a = 10$ cm, $b = 8$ cm y $c = 7$ cm.

Para determinar los ángulos A, B y C (Fig. 12) aplicamos sucesivamente el Teorema del coseno:

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$, en nuestro caso:

$$\cos A = \frac{8^2 + 7^2 - 10^2}{2 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{13}{112} = 0'1161, \text{ de donde } A = 83^\circ\ 20'$$

Análogamente:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac} = \frac{10^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 10 \cdot 7} = \frac{85}{140} = 0'6071,$$

de donde $B = 52^\circ\ 38'$ Finalmente:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab} = \frac{10^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 10 \cdot 8} = \frac{115}{160} = 0'7188,$$

de donde $C = 44^\circ\ 2'$

2.4. *Caso IV.* Resolución de un triángulo dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Sea el triángulo ABC, con $a = 12$ cm, $b = 15$ cm y $A = 48^\circ$

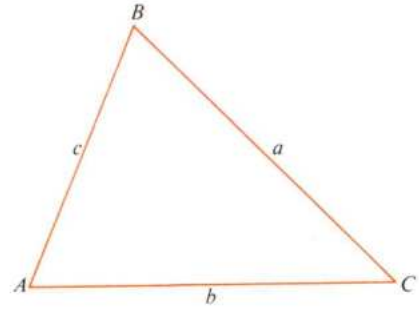
Para determinar los ángulos B y C (Fig. 13) y el lado c procedemos de la siguiente forma:

a) Cálculo de B y C:

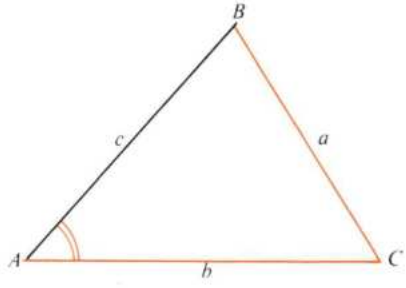
Por el Teorema del seno, $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$; por tanto,

$$\text{sen } B = \frac{15 \cdot \text{sen } 48^\circ}{12} = \frac{15 \cdot 0'7431}{12} = 0'9289, \text{ de donde}$$

$$B = 68^\circ\ 16' \quad \text{o} \quad B = 111^\circ\ 44'$$



(Fig. 12)



(Fig. 13)

12. Calcula el ángulo A y los lados b y c de un triángulo ABC sabiendo que $B = 40^\circ$, $C = 63^\circ$ y $a = 12$ cm.

13. Sea el triángulo ABC tal que $a = 30$ cm, $A = 71^\circ$ y $B = 47^\circ$. Calcula los lados b y c y el ángulo C.

14. Calcula los ángulos de un triángulo ABC con $a = 10$ cm, $b = 35$ cm y $c = 39$ cm.

15. Calcula los ángulos de un triángulo sabiendo que sus tres lados miden, respectivamente, 34, 38 y 45 cm.

Tomando el valor $B = 68° 16'$

$$C = 180° - (A + B) = 180° - (48° + 68° 16') = 63° 44'$$

b) Cálculo de c:

Por el Teorema del seno, $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C}$, de donde

$$c = \frac{12 \cdot \text{sen } 63° 44'}{\text{sen } 48°} = \frac{12 \cdot 0'8967}{0'7431} = 14'48 \text{ cm.}$$

2.5. En general, dados los lados a, b y el ángulo A, para que se pueda resolver el triángulo debe ocurrir:

a) $\frac{b \cdot \text{sen } A}{a} \leqslant 1$, por ser $\text{sen } B = \frac{b \cdot \text{sen } A}{a}$

b) Supuesto que se verifica a), el ángulo B resultante debe ser tal que $A + B < \pi$, ya que de otra forma el triángulo no existe.

Por consiguiente, pueden ocurrir tres casos:

Primer caso

$\frac{b \cdot \text{sen } A}{a} > 1$, el problema es imposible. Gráficamente significa (Fig. 14) que a es menor que la altura $\overline{CD} = b \text{ sen } A$ correspondiente al vértice C.

Segundo caso

$\frac{b \cdot \text{sen } A}{a} = 1$, entonces $\text{sen } B = 1$ y $B = \frac{\pi}{2}$

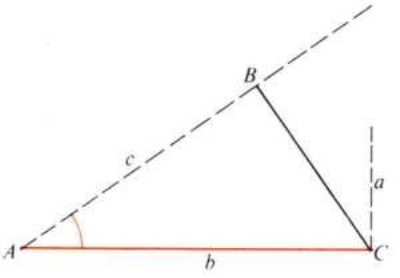
Si $A \geqslant \frac{\pi}{2}$, el problema carece de solución, ya que $A + B \geqslant \pi$

Si $A < \frac{\pi}{2}$, el ángulo C es el complementario de A y el lado c está unívocamente determinado; por tanto, el problema admite solución única.

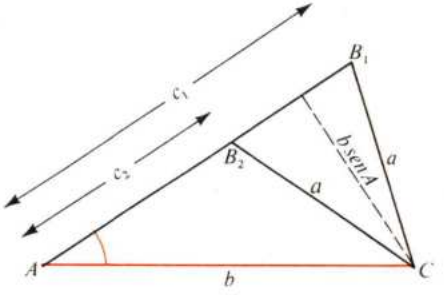
Tercer caso

$\frac{b \cdot \text{sen } A}{a} < 1$, entonces $\text{sen } B = \frac{b \cdot \text{sen } A}{a}$, pero para este valor del seno corresponden dos ángulos entre 0 y π: uno agudo, B_1, y el otro su suplementario, B_2.

Si $B_1 + A < \pi$ y $B_2 + A < \pi$, el problema tiene entonces dos soluciones (Fig. 15).



(Fig. 14)



(Fig. 15)

16. Calcula el ángulo C y el lado c del ejemplo del apartado **2.4.** para $B = 111° 44'$

17. Conocidos los lados a, b y el ángulo A, demuestra que si $A \geqslant \frac{\pi}{2}$ la resolución del triángulo tiene como máximo una solución.

Si $B_1 + A < \pi$ y $B_2 + A > \pi$, el problema tiene una solución única, y es la correspondiente al valor B_1.

Si $B_1 + A > \pi$ y $B_2 + A > \pi$, el problema es irresoluble, ya que no existiría el ángulo C ni para B_1 ni para B_2.

Ejemplos:

- Resolvamos un triángulo con los siguientes datos:

  $a = 45$ cm, $b = 60$ cm y $A = 80°$

  Para calcular el ángulo B:

  $$\frac{b \cdot \operatorname{sen} A}{a} = \frac{60 \cdot \operatorname{sen} 80°}{45} = \frac{60 \cdot 0'9848}{45} = \frac{59'0880}{45} > 1$$

  En consecuencia, el problema carece de solución.

- Sean $a = 27'3$ cm, $b = 30$ cm y $A = 65° 30'$; entonces:

  $\frac{b \cdot \operatorname{sen} A}{a} = \frac{30 \cdot \operatorname{sen} 65° 30'}{27'3} = \frac{30 \cdot 0'9100}{27'3} = 1$, por tanto:

  $B = 90°$, y el problema tiene solución única:

  $C = 90 - 65° 30' = 24° 30'$

  $$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{27'3 \operatorname{sen} 24° 30'}{\operatorname{sen} 65° 30'} = 27'3 \operatorname{tg} 24° 30' =$$

  $$= 27'3 \cdot 0'4557 = 12'44 \text{ cm}.$$

18. Resuelve el triángulo en cada uno de los casos siguientes:

a) $a = 37$ cm, $b = 59$ cm, $A = 87° 30'$

b) $a = 42$ cm, $b = 50$ cm, $A = 52° 30'$

c) $a = 20$ cm, $b = 8$ cm, $A = 61° 20'$

d) $a = 48$ cm, $b = 62$ cm, $A = 79° 40'$

e) $a = 11'868$ cm, $b = 12$ cm, $A = 81° 30'$

19. ¿Es posible encontrar un triángulo tal que $A = 89° 30'$ y $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$? Razona la respuesta.

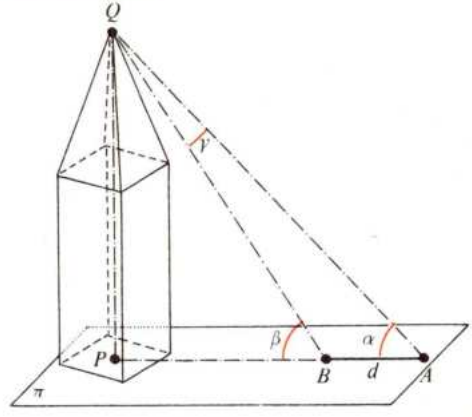
3 Aplicaciones prácticas de las relaciones entre los elementos de un triángulo

3.1. *Cálculo de la altura de una torre cuyo pie es inaccesible, siendo horizontal el terreno que ocupa* (Fig. 16).

Sean Q el punto más alto de la torre y π el plano en donde está situada su base. Llamemos P al punto de π tal que $\overline{PQ}$ es perpendicular a π. El problema trata precisamente de determinar la longitud del segmento $\overline{PQ}$.

Sea A un punto de π exterior a la torre; colocando un teodolito o un grafómetro (aparatos para medir ángulos) en el punto A, se mide el ángulo $PAQ = \alpha$. Sobre el plano QAP se coloca el aparato (posición B) y se mide el ángulo $PBQ = \beta$. Entonces, llamando $\gamma = BQA$, resulta:

$$\gamma = \pi - (\alpha + (\pi - \beta)) = \beta - \alpha$$



(Fig. 16)

Si d es la distancia entre los puntos A y B, aplicando el Teorema de los senos al triángulo QAB, se tiene:

$$\frac{\overline{QB}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{d}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}, \text{ de donde } \overline{QB} = \frac{d\cdot\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}$$

Por otra parte, en el triángulo rectángulo QPB.

$\overline{QP} = \overline{QB}\ \operatorname{sen}\beta$; sustituyendo $\overline{QB}$ por su valor, resulta:

$$\overline{QP} = \frac{d\cdot\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)},$$

expresión que nos da la altura de la torre en función de los ángulos α, β y de la distancia d.

Ejemplo:

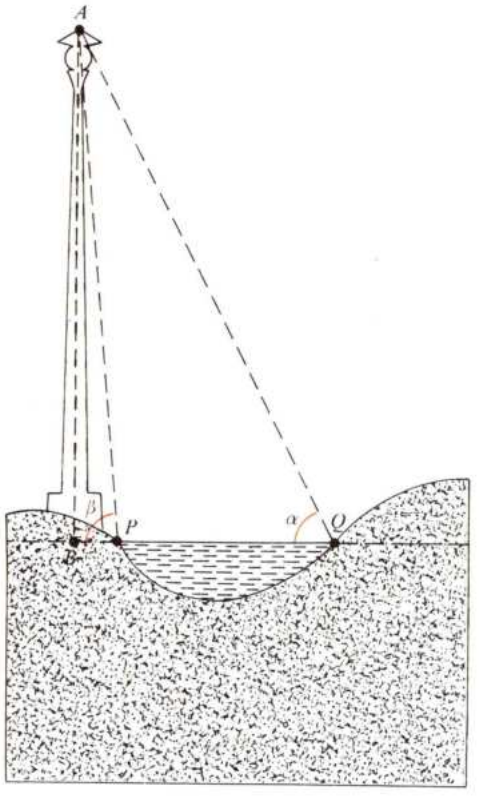
- Considera el faro de la figura 17. Se quiere determinar la altura $\overline{AB}$ de la torre al nivel del mar. Supongamos que hechas las mediciones en los puntos P y Q, resulta:

  $$\alpha = BQA = 63^\circ, \quad \beta = BPA = 85^\circ \quad \text{y} \quad \overline{PQ} = 72'5 \text{ m}.$$

  Entonces:

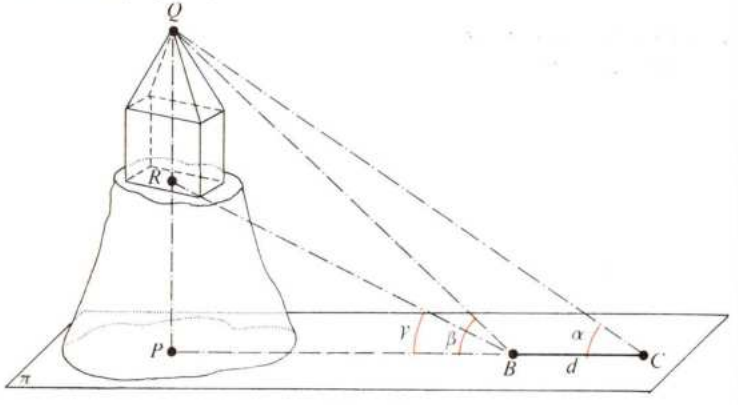
  $$\overline{AB} = \frac{72'5\cdot\operatorname{sen}63^\circ\cdot\operatorname{sen}85^\circ}{\operatorname{sen}(85^\circ-63^\circ)} = \frac{72'5\cdot\operatorname{sen}63^\circ\cdot\operatorname{sen}85^\circ}{\operatorname{sen}22^\circ} =$$

  $$= \frac{72'5\cdot 0'8910\cdot 0'9962}{0'3746} = 171'79 \text{ metros}.$$



(Fig. 17)

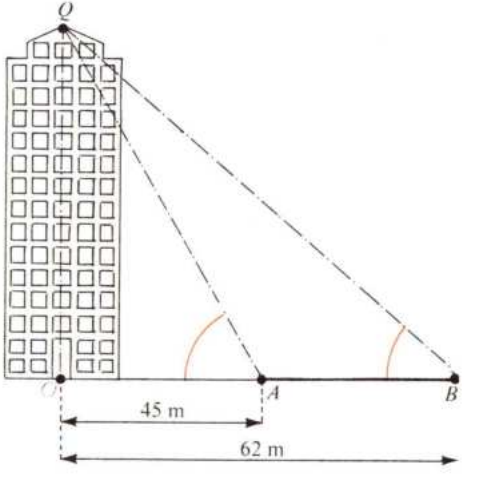
3.2. *Cálculo de la altura de un edificio situado sobre una montaña* (Fig. 18).



(Fig. 18)

De acuerdo con la figura, el problema trata de calcular la longitud del segmento $\overline{RQ}$; para ello, se coloca un teodolito en el punto C del plano horizontal π y se mide el ángulo $\alpha = PCQ$ o ángulo de elevación del punto Q desde el punto C.

20. Calcula la altura del edificio de la siguiente figura sabiendo que el punto Q se ve desde B bajo un ángulo de 48° 30' y desde el punto A bajo un ángulo de 51° 30'.



A continuación, y sobre el mismo plano PCQ, se coloca el teodolito en la posición B midiendo los ángulos $\beta = PBQ$ y $\gamma = PBR$. Llamemos $d = \overline{CB}$. Por el Teorema del seno aplicado al triángulo BCQ se tiene:

$$\frac{\overline{QB}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{d}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}, \text{ de donde } \overline{QB} = \frac{d \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$$

Por otra parte, en el triángulo RQB

$$\frac{\overline{RQ}}{\operatorname{sen}(\beta - \gamma)} = \frac{\overline{QB}}{\operatorname{sen} QRB}$$

Sustituyendo $\overline{QB}$ por su valor y teniendo en cuenta que $QRB = 90^\circ + \gamma$, resulta:

$$\overline{RQ} = \frac{d \cdot \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\beta - \gamma)}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)\cos\gamma},$$

expresión que nos da la altura del edificio en función de los ángulos de elevación α, β, γ y de la distancia d.

Ejemplo:

- Considera la figura 19. Se quiere determinar la altura $\overline{AB}$ del repetidor de televisión situado encima de la montaña. Hechas las mediciones desde los puntos P y Q se sabe que:

$$\overline{PQ} = 12'5 \text{ m}$$
$$\alpha = OPA = 67^\circ$$
$$\beta = OQA = 70^\circ$$
$$\gamma = OQB = 66^\circ$$

Entonces:

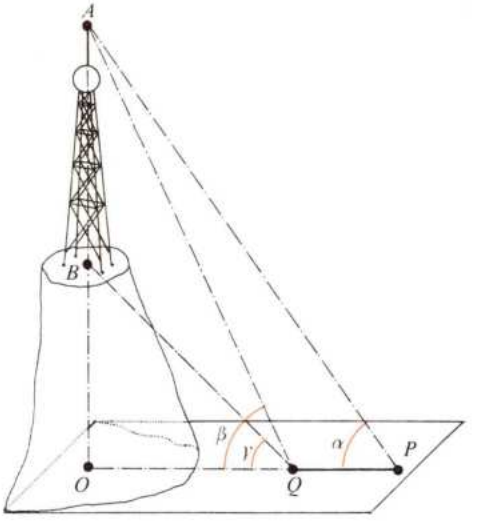
$$\overline{AB} = \frac{12'5 \cdot \operatorname{sen} 67^\circ \cdot \operatorname{sen}(70^\circ - 66^\circ)}{\operatorname{sen}(70^\circ - 67^\circ)\cos 66^\circ} =$$

$$= \frac{12'5 \cdot 0'9205 \cdot 0'0698}{0'0523 \cdot 0'4067} = 37'76 \text{ m}$$

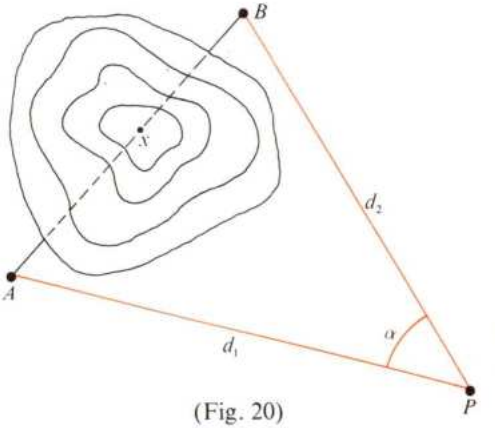
3.3. *Cálculo de la distancia entre dos puntos entre los que media un obstáculo.*

Supongamos que se quiere calcular la distancia x desde el punto A al punto B (Fig. 20), entre los que media una montaña.

Sea P un punto desde el cual se ven los puntos A y B y sea d_1 la distancia de P a A y d_2 la distancia de P a B. Medido el ángulo $\alpha = APB$, el problema se reduce a determinar el lado de un triángulo conocidos los otros dos y el ángulo que forman.



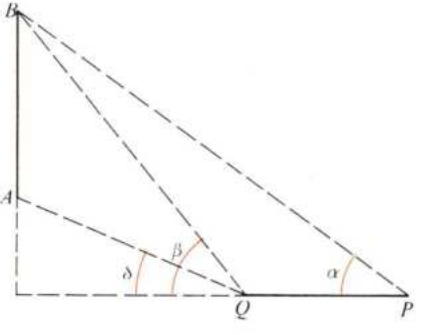
(Fig. 19)



(Fig. 20)

21. Calcula la longitud del segmento $\overline{AB}$ de la siguiente figura si $PQ = 20$ m.

$\alpha = 60^\circ$, $\beta = 70^\circ$, $\delta = 56^\circ$



Ejemplo:

- Considera los puntos A y B de la figura 21 entre los que media un barranco. Se sabe que $\overline{AP} = 114$ m, $\overline{BP} = 100$ m y $\alpha = APB = 50°$; entonces, aplicando el caso I de resolución de triángulos, tenemos que:

$$\frac{B+A}{2} = 90° - \frac{50}{2} = 65°$$

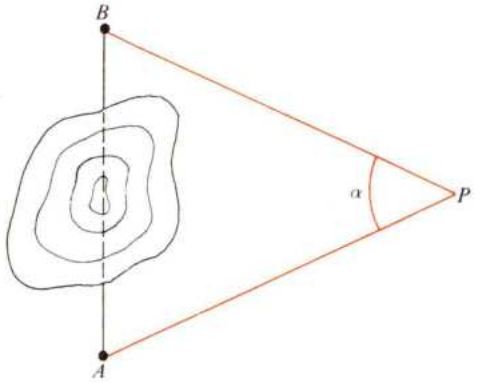
$$\text{tg}\,\frac{B-A}{2} = \frac{AP-BP}{AP+BP}\cot\frac{50°}{2} = \frac{114-100}{114+100}\cdot 2'1445 = 0'1403;$$

luego $\frac{B-A}{2} = 7°\,59'$; por tanto, $A = 57°\,1'$ y $B = 72°\,59'$

En consecuencia:

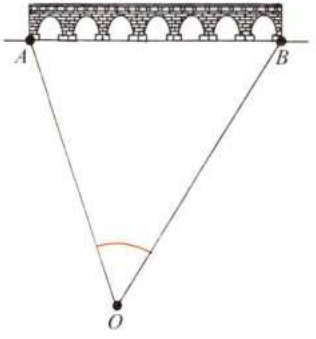
$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{\overline{BP}}{\text{sen}\,A}, \text{ de donde}$$

$$\overline{AB} = \frac{100\cdot \text{sen}\,50°}{\text{sen}\,57°\,1'} = \frac{100\cdot 0'7660}{0'8389} = 91'31 \text{ m.}$$

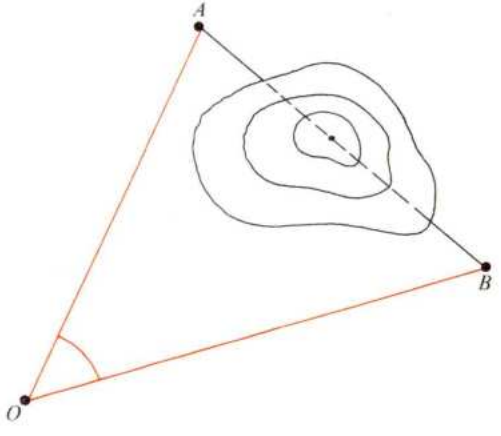


(Fig. 21)

22. Calcula la longitud que tiene el puente de la siguiente figura si se sabe que $\overline{AO} = 52$ m, $\overline{BO} = 63'5$ m y $AOB = 49°\,52'$.



23. Calcula la distancia entre los puntos A y B entre los que hay una montaña sabiendo que sus distancias a un punto fijo O son de 315 y 375 m, respectivamente, y que el angulo AOB es de $48°\,54'$.



Ejercicios y cuestiones

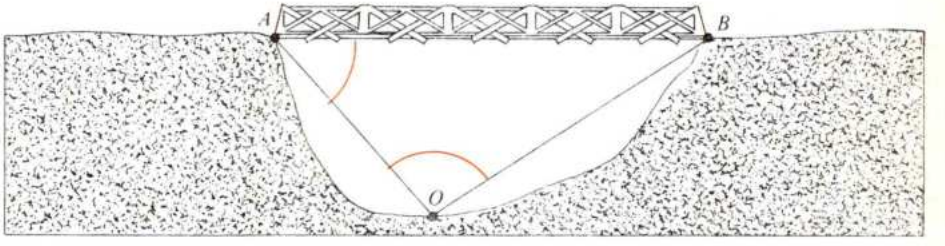
24. Resuelve el triángulo ABC en cada uno de los siguientes casos:

a) $a = 12$ m, $B = 44°$ y $C = 71°$,
b) $a = 23$ m, $b = 25$ m y $A = 42° 38'$,
c) $a = 31$ m, $b = 28$ m y $C = 72°$,
d) $a = 18$ m, $b = 42$ m y $c = 35$ m.

25. Demuestra que el área de un triángulo ABC puede expresarse como $S = p \cdot r$, de donde p es el semiperímetro y r el radio de la circunferencia inscrita.

26. Un árbol proyecta una sombra de 16'75 metros cuando el ángulo de elevación del sol es de 32°. Calcula la altura del árbol.

27. Se quiere construir un puente entre los puntos A y B de la siguiente figura. Se sabe que $AOB = 93°$, $BAO = 48°$ y que la distancia medida en línea recta entre los puntos A y O es de 75 m. Calcula la longitud del puente.

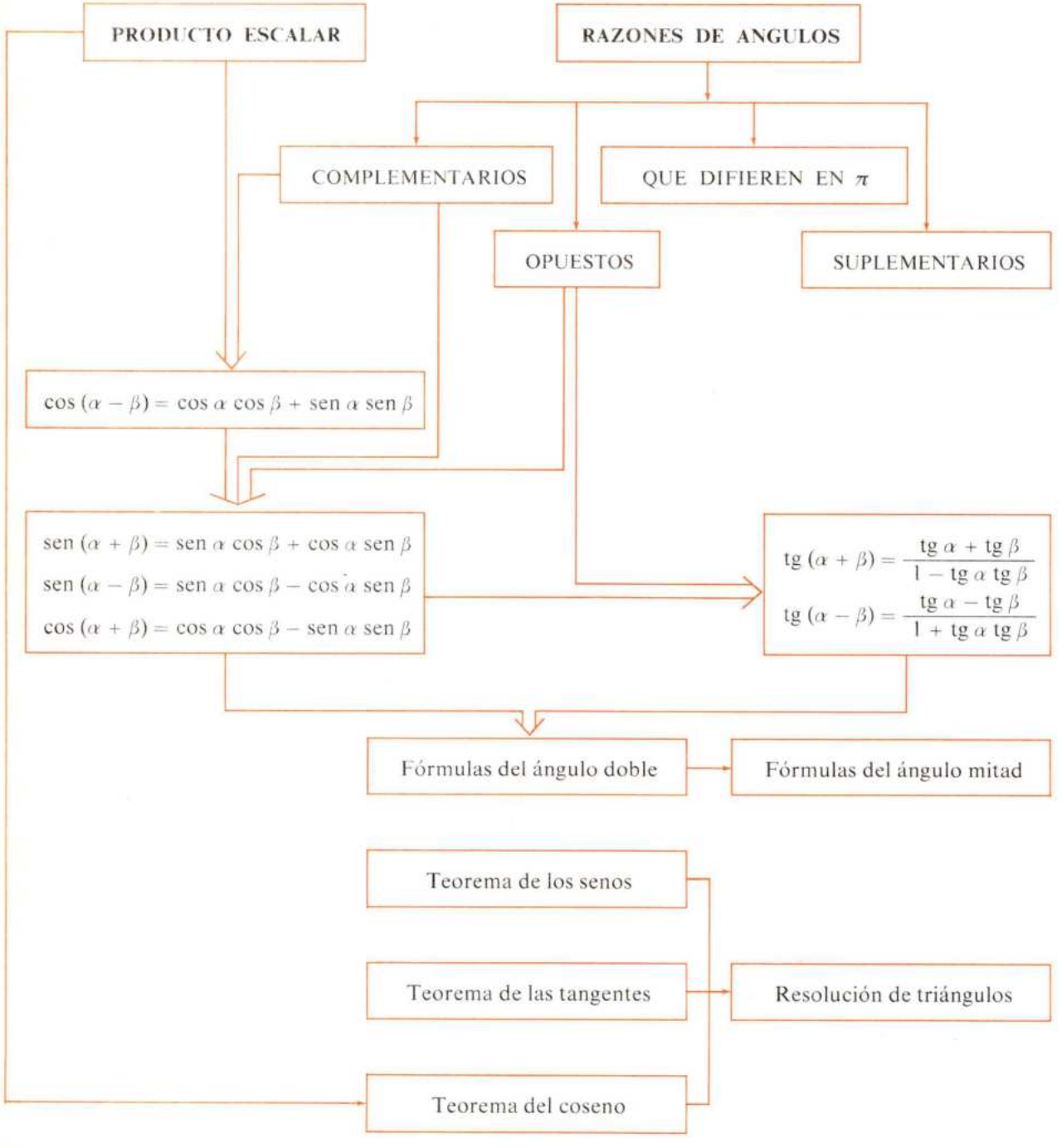


28. Un río tiene las dos orillas paralelas. Desde los puntos A y B de una orilla se observa un punto P de la orilla opuesta; las visuales forman con la dirección de la orilla unos ángulos de 42° y 56°, respectivamente. Calcular la anchura del río sabiendo que la distancia entre los puntos A y B es de 31'5 m.

29. Una torre es tal que proyecta una sombra de 80 metros cuando el ángulo de elevación del sol es de 45° y de 100 metros cuando el ángulo de elevación del sol es de 50°. Calcula la altura de la torre.

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD 2

TRIGONOMETRIA



Unidad 3 GEOMETRIA EUCLIDEA DEL PLANO

En el curso anterior has estudiado las ecuaciones de la recta en el plano sin hacer intervenir problemas de distancias y de ángulos. Este año, mediante el producto escalar, hemos definido una distancia que nos permite enriquecer el estudio de la recta, tratando problemas métricos como la distancia de un punto a una recta y la distancia entre dos rectas. Asimismo, trataremos problemas de ángulos, como el ángulo formado por dos rectas, bisectrices, etc.

Por otra parte, la noción de distancia nos permite también el estudio de las cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola, ya que cada una de ellas no es más que un conjunto de puntos entre los que existen relaciones fácilmente expresables mediante distancias.

Tema 6

1. Cambio de base en espacios vectoriales de dimensión dos.
2. Coordenadas cartesianas rectangulares.
3. Traslación.
4. Traslación de ejes.
5. Giro de ejes.

Tema 7

1. Ecuaciones de la recta.
2. Condición de perpendicularidad.
3. Distancia de un punto a una recta.
4. Ecuación normal de la recta.

Tema 8

1. Lugares geométricos.
2. Angulo formado por dos rectas.
3. Bisectrices.

Tema 9

1. Ecuación de la circunferencia.
2. Determinación de la circunferencia.
3. Reducción de la ecuación de una circunferencia.
4. Intersección con una recta.
5. Potencia de un punto.
6. Eje radical y centro radical.
7. Elipse y sus elementos.
8. Ecuación de la elipse.

Tema 10

1. Hipérbola y sus elementos.
2. Ecuación de la hipérbola.
3. Asíntotas de la hipérbola.
4. Hipérbola equilátera: ecuación referida a sus asíntotas.
5. Otras ecuaciones de la hipérbola.
6. Parábola y sus elementos.
7. Ecuaciones de la parábola.
8. Propiedades comunes a las tres cónicas.

Tema 6

CAMBIOS DE SISTEMAS DE REFERENCIA EN EL PLANO

Este tema está dedicado a estudiar el método que nos permita calcular las coordenadas de un punto del plano respecto de un sistema de referencia conocidas sus coordenadas respecto de otro. Para ello empezamos con cuestiones que ya conoces, como son el cambio de base en un espacio vectorial, para continuar después con la traslación y el giro de ejes.

1 Cambio de base en espacios vectoriales de dimensión dos

Vamos a recordar en este párrafo el problema del cambio de base en espacios vectoriales de dimensión dos, que ya has visto en el curso anterior.

Sean $\mathbf{V}^2$ un espacio vectorial de dimensión dos y $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dos de sus bases. Si $\vec{a}$ es un vector de $\mathbf{V}^2$ $\vec{a} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2$ y $\vec{a} = x'_1\vec{v}_1 + x'_2\vec{v}_2$, en donde (x_1, x_2) son las coordenadas de $\vec{a}$ con respecto a B_1 y (x'_1, x'_2) las coordenadas de $\vec{a}$ con respecto a B_2 (Fig. 1) y si (a_{11}, a_{12}) son las coordenadas de $\vec{u}_1$ con respecto a B_2 y (a_{21}, a_{22}) las coordenadas de $\vec{u}_2$ con respecto a B_2, entonces, por ser:

$$\vec{u}_1 = a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2 \text{ y } \vec{u}_2 = a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2$$

se tiene que:

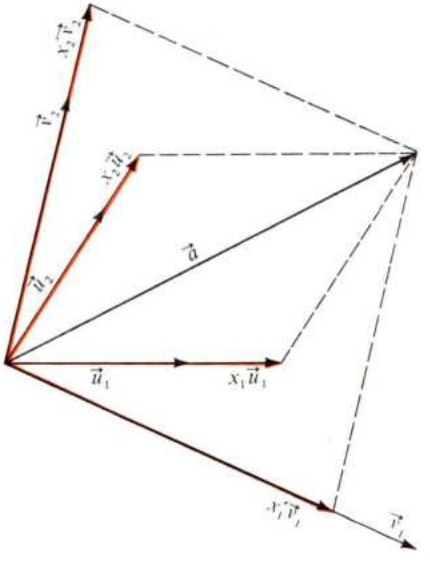
$$\vec{a} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 = x_1(a_{11}\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) + x_2(a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2) =$$
$$= (x_1a_{11} + x_2a_{21})\vec{v}_1 + (x_1a_{12} + x_2a_{22})\vec{v}_2 = x'_1\vec{v}_1 + x'_2\vec{v}_2$$

En consecuencia:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1a_{11} + x_2a_{21} \\ x'_2 = x_1a_{12} + x_2a_{22} \end{cases} \qquad [1]$$

ecuaciones llamadas de *cambio de base*.

Observa que despejando x_1, x_2 en el sistema [1] se obtienen las ecuaciones que resuelven el problema inverso.



(Fig. 1)

Ejemplos:

- Sean $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dos bases de $\mathbf{V}^2$ tales que $\vec{u}_1 = 3\vec{v}_1 - 7\vec{v}_2$ y $\vec{u}_2 = 2\vec{v}_1 + 6\vec{v}_2$.

  Si $\vec{a} = 2\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2$, sus coordenadas (x_1', x_2') con respecto a B_2 son:

$$\begin{cases} x_1' = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 16 \\ x_2' = 2(-7) + 5 \cdot 6 = 16 \end{cases}$$

  Observa que en este ejemplo $a_{11} = 3$, $a_{12} = -7$, $a_{21} = 2$ y $a_{22} = 6$.

- Sean $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dos bases de $\mathbf{V}^2$ tales que $\vec{u}_1 = 5\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$ y $\vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

  Si $\vec{x} = -\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2$, sus coordenadas (x_1, x_2) con respecto a la base B_1 vienen dadas por $-1 = 5x_1 + x_2$ y $4 = -2x_1 + x_2$,

  de donde $x_1 = -\frac{5}{7}$ y $x_2 = \frac{18}{7}$;

  en consecuencia, $\vec{x} = -\frac{5}{7}\vec{u}_1 + \frac{18}{7}\vec{u}_2$

- Sean $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dos bases de $\mathbf{V}^2$. Vamos a calcular las ecuaciones de cambio de base de B_1 a B_2 sabiendo que dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son tales que

  $\vec{a} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$ y $\vec{b} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, y que

  $\vec{a} = \vec{v}_1 + 4\vec{v}_2$ y $\vec{b} = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$. Entonces, de acuerdo con la notación seguida en [1], tenemos que:

$$\text{vector } \vec{a} \longrightarrow \begin{cases} 1 = 1a_{11} + 2a_{21} & \text{[a]} \\ 4 = 1a_{12} + 2a_{22} & \text{[b]} \end{cases}$$

$$\text{vector } \vec{b} \longrightarrow \begin{cases} 3 = 2a_{11} + (-1)a_{21} & \text{[c]} \\ 2 = 2a_{12} + (-1)a_{22} & \text{[d]} \end{cases}$$

  Multiplicando la ecuación [c] por 2 y sumándola a [a] se obtiene $a_{11} = \frac{7}{5}$. Sustituyendo en [a], $a_{21} = -\frac{1}{5}$

  Multiplicando la ecuación [d] por 2 y sumándola a [b], se obtiene $a_{12} = \frac{8}{5}$. Sustituyendo en [b], $a_{22} = \frac{6}{5}$.

  En consecuencia, las ecuaciones de cambio de base son:

$$x_1' = -\frac{7}{5}x_1 + \left(-\frac{1}{5}\right)x_2$$

$$x_2' = \frac{8}{5}x_1 + \frac{6}{5}x_2$$

Ejercicios:

1. Sean $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B_2 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ dos bases de $\mathbf{V}^2$ tales que

$\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$ y $\vec{u}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$

Si $\vec{a} = 2\vec{u}_1 - 12\vec{u}_2$ y $\vec{b} = 4\vec{v}_1 + 8\vec{v}_2$, calcula las coordenadas de $\vec{a}$ respecto de B_2 y las coordenadas de $\vec{b}$ respecto de B_1.

2. Sean $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B_2 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ bases de $\mathbf{V}^2$ tales que $\vec{u}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ y $\vec{u}_2 = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$. Calcula las coordenadas respecto de la base B_2 de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $3\vec{a} + 4\vec{b} - 5\vec{c}$, siendo $\vec{a} = 7\vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $\vec{b} = 2\vec{u}_1 - 5\vec{u}_2$ y $\vec{c} = -5\vec{u}_1 + 6\vec{u}_2$.

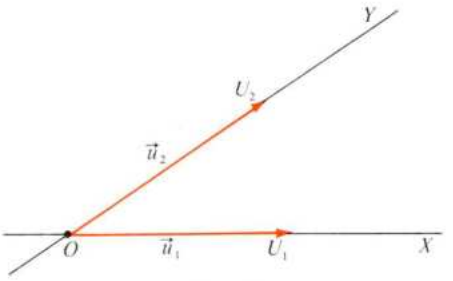
3. Sean $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dos bases de $\mathbf{V}^2$ y sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ los vectores:
$\vec{x} = 3\vec{u}_1 + 8\vec{u}_2 = 43\vec{v}_1 + 21\vec{v}_2$
$\vec{y} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = 7\vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Halla las ecuaciones del cambio de la base B_1 a B_2.

2 Coordenadas cartesianas rectangulares

2.1. Consideremos el plano vectorial euclídeo $\mathbf{V}^2$ y el plano afín euclídeo $\mathscr{E}_2$. Sean O un punto de $\mathscr{E}_2$ y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base de $\mathbf{V}^2$. Recordemos que la terna $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es un sistema de referencia afín por medio del cual todo punto P de $\mathscr{E}_2$ queda determinado de forma única por un par de números reales (x, y) que reciben el nombre de coordenadas cartesianas de P respecto de dicho sistema y que vienen determinados por $[\overrightarrow{OP}] = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2$.

Si U_1 y U_2 son los puntos de $\mathscr{E}_2$ tales que $[\overrightarrow{OU_1}] = \vec{u}_1$ y $[\overrightarrow{OU_2}] = \vec{u}_2$, o, lo que es lo mismo, tales que sus coordenadas cartesianas son respectivamente (1, 0) y (0, 1), llamamos ejes de coordenadas cartesianas a las rectas OU_1 y OU_2. La recta OU_1 se llama eje X o eje de abscisas, la recta OU_2, eje Y o eje de ordenadas y el punto O, origen de coordenadas (Fig. 2).

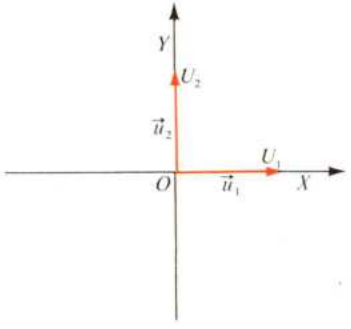


(Fig. 2)

2.2. Un sistema de referencia afín de $\mathscr{E}_2$ $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ se llama ortonormal si la base de $\mathbf{V}^2$, $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base ortonormal.

Si $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es un sistema de referencia ortonormal y U_1 y U_2 los puntos de $\mathscr{E}_2$ tales que $[\overrightarrow{OU_1}] = \vec{u}_1$ y $[\overrightarrow{OU_2}] = \vec{u}_2$, las rectas OU_1 y OU_2, ejes de coordenadas cartesianas asociados a $\mathscr{R}$, reciben el nombre de *ejes de coordenadas cartesianas rectangulares.*

Por ser los vectores $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ ortogonales, el eje X y el eje Y determinan cuatro ángulos rectos (Fig. 3).



(Fig. 3)

De ahora en adelante supondremos, por comodidad, que el ángulo $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ es recto; asimismo, consideraremos como sinónimos el referirnos a un sistema de referencia ortonormal $\mathscr{R}$ o a un par de ejes de coordenadas cartesianas rectangulares.

4. Sea $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ un sistema de referencia afín euclídeo tal que $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = 2$ y $\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \frac{1}{5}$

Calcula el módulo del vector $[\overrightarrow{OP}]$ siendo P el punto de coordenadas (8, 2).

5. Sea $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ donde $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2|$. Razona dónde se encuentran los puntos P de coordenadas (x, y) tales que $x = y$.

6. Sea $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ un sistema ortonormal y sean P, Q y S los puntos de coordenadas (8, 2) (3, −1) y (6, 5), respectivamente. Calcula:

a) el módulo de los vectores $[\overrightarrow{OP}]$, $[\overrightarrow{OQ}]$ y $[\overrightarrow{OS}]$

b) los productos escalares: $[\overrightarrow{OP}] \cdot [\overrightarrow{OQ}]$; $[\overrightarrow{OP}] \cdot [\overrightarrow{OQ} - 6[\overrightarrow{OS}]]$; $([\overrightarrow{OP}] - [\overrightarrow{OS}])^2$

3 Traslación

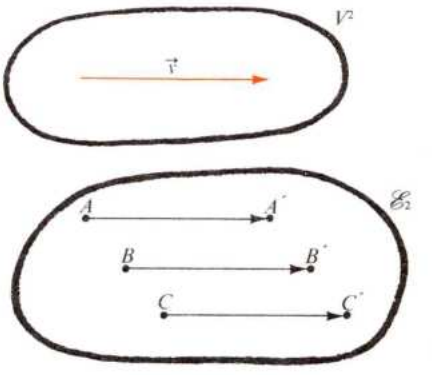
3.1. Consideremos el plano afín $\mathscr{E}_2$ sobre el espacio vectorial $\mathbf{V}^2$ y sea $\vec{v}$ un vector de $\mathbf{V}^2$. *Se llama traslación definida por el vector* $\vec{v}$ *a la aplicación*

$$T_{\vec{v}}: \mathscr{E}_2 \longrightarrow \mathscr{E}_2$$
$$P \longrightarrow P'$$

en donde P' es el punto tal que $[\overrightarrow{PP'}] = \vec{v}$

Ejemplo:

- En la figura 4, los puntos A', B' y C' son los trasladados de los puntos A, B y C, respectivamente, mediante la traslación definida por el vector $\vec{v}$.



(Fig. 4)

3.2. La traslación $T_{\vec{v}}$ es una biyección para todo $\vec{v}$ de $\mathbf{V}^2$.

En efecto:

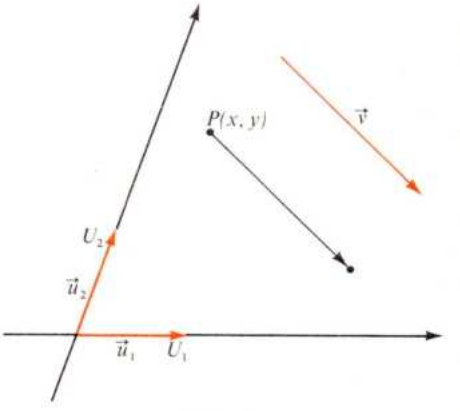
a) Sean P y Q puntos de $\mathscr{E}_2$ tales que

$T_{\vec{v}}(P) = P'$ y $T_{\vec{v}}(Q) = P'$

Por ser $[\overrightarrow{PP'}] - [\overrightarrow{QP'}] = \vec{v}$, los vectores $\overrightarrow{PP'}$ y $\overrightarrow{QP'}$ son equipolentes y por tanto $P = Q$, ya que ambos vectores tienen el mismo extremo; por tanto, $T_{\vec{v}}$ es una aplicación inyectiva.

b) Sea Q un punto arbitrario de $\mathscr{E}_2$. Llamemos P al punto de $\mathscr{E}_2$ tal que $[\overrightarrow{QP}] = -\vec{v}$; entonces, $[\overrightarrow{PQ}] = \vec{v}$, de donde $T_{\vec{v}}(P) = Q$, lo cual confirma que $T_{\vec{v}}$ es una aplicación sobreyectiva.

3.3. Sean $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ un sistema de referencia afín, $\vec{v} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$ un vector de $\mathbf{V}^2$, y $T_{\vec{v}}$ la traslación definida por $\vec{v}$. Si P es un punto de $\mathscr{E}_2$ de coordenadas (x, y), vamos a hallar la expresión de las coordenadas (x', y') del punto $P' = T_{\vec{v}}(P)$. (Fig. 5)



(Fig. 5)

Por ser $\vec{v} = [\overrightarrow{PP'}] = [\overrightarrow{OP'}] - [\overrightarrow{OP}]$, resulta:

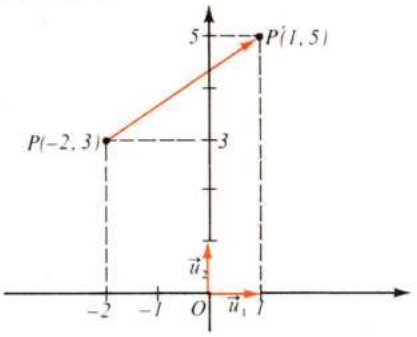
$$[\overrightarrow{OP'}] = \vec{v} + [\overrightarrow{OP}] = (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) + (x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2) =$$
$$= (a + x)\vec{u}_1 + (b + y)\vec{u}_2, \text{ de donde}$$
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

7. Considera el vector $\vec{0}$ de $\mathbf{V}^2$ ¿Cuál es la traslación $T_{\vec{0}}$?

8. Considera tres puntos, A, B y C, no alineados. Demuestra que si C' es el trasladado de C por la traslación definida por el vector $[\overrightarrow{AB}]$, los puntos $ABC'C$ forman un paralelogramo.

Ejemplos:

- Sea $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ un sistema de referencia ortonormal y sea $\vec{v} = 3\,\vec{u}_1 + 2\,\vec{u}_2$. Consideramos el punto P de coordenadas $(-2, 3)$ (Fig. 6).



(Fig. 6)

Las coordenadas (x', y') del punto $P' = T_{\vec{v}}(P)$ son:

$$\begin{cases} x' = -2 + 3 = 1 \\ y' = 3 + 2 = 5 \end{cases}$$

- Con el mismo sistema de referencia del ejemplo anterior, sea Q el punto de coordenadas (8, 9); entonces las coordenadas (x_1, y_1) del punto $Q' = T_{\vec{v}}(Q)$ son:

$$\begin{cases} x' = 8 + 3 = 11 \\ y' = 9 + 2 = 11 \end{cases}$$

3.4. *La traslación conserva las distancias*

Vamos a ver que en el caso de que trabajemos en el espacio afín euclídeo, las traslaciones conservan la distancia. En efecto: Sea $\vec{v}$ un vector del espacio vectorial euclídeo $\mathbf{V}^2$ y $T_{\vec{v}}$ la traslación definida por $\vec{v}$.

Si P y Q son dos puntos cualesquiera del plano afín euclídeo $\mathscr{E}_2$, entonces

$$d(P, Q) = d\left(T_{\vec{v}}(P), T_{\vec{v}}(Q)\right)$$

En efecto (Fig. 7): llamando $P' = T_{\vec{v}}(P)$ y $Q' = T_{\vec{v}}(Q)$

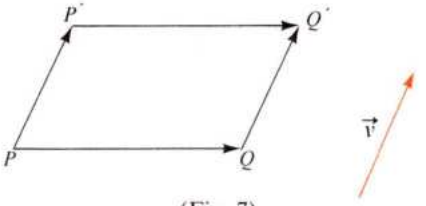
$$[\overrightarrow{P'Q'}] = \left([\overrightarrow{PQ}] + [\overrightarrow{QQ'}]\right) - [\overrightarrow{PP'}]$$

Por ser $[\overrightarrow{QQ'}] = [\overrightarrow{PP'}] = \vec{v}$, resulta que $[\overrightarrow{P'Q'}] = [\overrightarrow{PQ}]$

de donde

$$d(P, Q) = \left|\, [\overrightarrow{PQ}] \,\right| = \left|\, [\overrightarrow{P'Q'}] \,\right| = d(P', Q')$$

Esta propiedad se enuncia diciendo que la traslación conserva la distancia, o bien que la traslación es una *isometría*.



(Fig. 7)

9. Sean $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ un sistema de referencia ortonormal y $\vec{v} = \vec{u}_1 - 2\,\vec{u}_2$. Halla las coordenadas de los trasladados de los puntos (3, 4), (8, 6), (−2, 5), (0, 0), (3, 1) según el vector $\vec{v}$.

10. Sean $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ un sistema de referencia ortonormal y $\vec{v}$ un vector.

Si $P = (3, 2)$ y $P' = (1, 8)$, determina el vector $\vec{v}$ sabiendo que $P' = T_{\vec{v}}(P)$.

11. Sea $\vec{v}$ un vector de $\mathbf{V}^2$ y P y Q puntos tales que $d(P, Q) = 8$. Calcula $d\left(T_{\vec{v}}(P), T_{\vec{v}}(Q)\right)$

12. Sean $\vec{v}$ un vector y P, Q, P' y Q' puntos tales que $P' = T_{\vec{v}}(P)$ y $Q' = T_{\vec{v}}(Q)$; razona si los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{P'Q'}$ son equipolentes.

4 Traslación de ejes

Las fórmulas que vamos a obtener en este apartado son válidas para todo sistema de referencia. Por utilizarse más a este nivel, lo haremos para el caso de sistemas de referencia ortonormales.

Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ una base ortonormal de $\mathbf{V}^2$ y sean O y O_1 puntos de $\mathscr{E}_2$. Consideremos los sistemas de referencia ortonormales $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $\mathscr{R}_1 = \{O_1; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

Los ejes X e Y de $\mathscr{R}$ son, respectivamente, paralelos a los ejes X_1 e Y_1 de $\mathscr{R}_1$ (Fig. 8).

Si P es un punto cualquiera de $\mathscr{E}_2$, $[\overrightarrow{OP}] = x\,\vec{u}_1 + y\,\vec{u}_2$ y $[\overrightarrow{O_1P}] = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2$, siendo (x, y) las coordenadas de P con respecto a $\mathscr{R}$ y (x_1, y_1) las coordenadas de P con respecto a $\mathscr{R}_1$.

Si las coordenadas de O_1 con respecto a $\mathscr{R}$ son (a, b), es $[\overrightarrow{OO_1}] = a\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2$, entonces por ser

$$[\overrightarrow{O_1P}] = [\overrightarrow{OP}] - [\overrightarrow{OO_1}] \text{ (Fig. 9) se tiene que:}$$

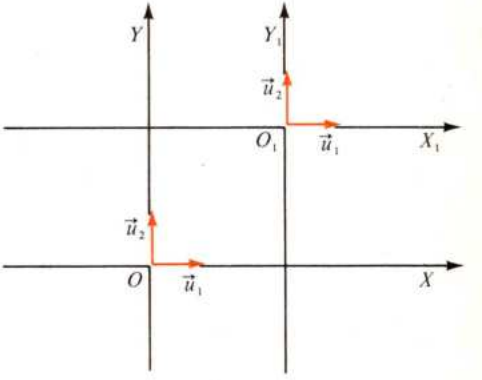
$$[\overrightarrow{O_1P}] = x_1\vec{u}_1 + y_1\vec{u}_2 = x\,\vec{u}_1 + y\,\vec{u}_2 - (a\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2) =$$
$$= (x-a)\vec{u}_1 + (y-b)\vec{u}_2, \text{ de donde}$$

$$\begin{cases} x_1 = x-a \\ y_1 = y-b \end{cases}$$

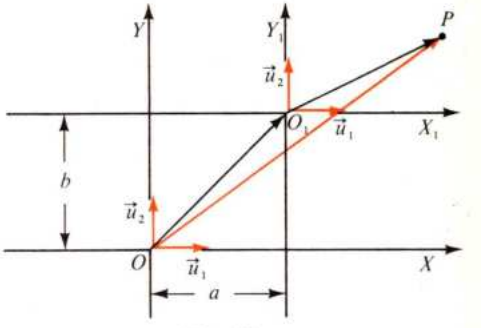
fórmulas de la traslación de ejes.

Si $\vec{v}$ es el vector tal que $\vec{v} = a\,\vec{u}_1 + b\,\vec{u}_2$, es fácil ver que el punto O_1 es el trasladado de O mediante la traslación $T_{\vec{v}}$, y que asimismo los ejes X_1 e Y_1 son los trasladados de los ejes X e Y mediante la traslación $T_{\vec{v}}$ (Fig. 10).

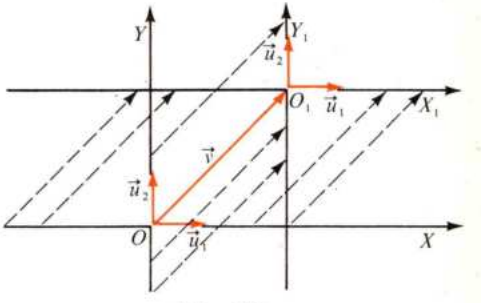
De ahí que el cambio de coordenadas al pasar del sistema de referencia $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ al de $\mathscr{R}_1 = \{O_1; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ se conozca con el nombre de cambio de coordenadas por la traslación de ejes según el vector $\vec{v}$.



(Fig. 8)



(Fig. 9)



(Fig. 10)

Ejemplo:

- Sean $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $\mathscr{R}_1 = \{O_1; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ dos sistemas de referencia ortonormales tales que las coordenadas de O_1 con respecto de $\mathscr{R}$ son (5, 3). Si P tiene de coordenadas (7, 6) respecto de $\mathscr{R}$, entonces las coordenadas de $P(x_1, y_1)$ respecto de $\mathscr{R}_1$ son:

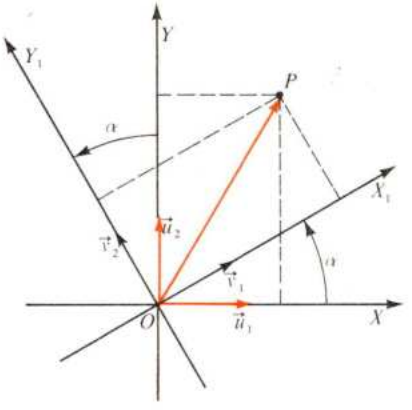
$$x_1 = 7 - 5 = 2 \quad \text{e} \quad y_1 = 6 - 3 = 3$$

13. Sea $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ un sistema de referencia ortonormal y sea O_1 el punto de coordenadas (2, −7). Considera el sistema de referencia $\mathscr{R}_1 = \{O_1; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y calcula las coordenadas respecto de $\mathscr{R}_1$ de los puntos $P_1(5, 6)$, $P_2(2, 8)$ y $P_3(4, -3)$ cuyas coordenadas están expresadas respecto de $\mathscr{R}$.

5 Giro de ejes

5.1. Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dos bases ortonormales de $\mathbf{V}^2$ tales que $(\vec{u}_1, \vec{v}_1) = (\vec{u}_2, \vec{v}_2) = \alpha$ y sea O un punto del plano afín euclídeo $\mathscr{E}_2$. Consideremos en $\mathscr{E}_2$ los sistemas de referencia ortonormales $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $\mathscr{R}_1 = \{O_1; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

Si X e Y son los ejes de $\mathscr{R}$ y X_1 e Y_1 los ejes de $\mathscr{R}_1$, es evidente (Fig. 11) que los ejes X y X_1 forman el mismo ángulo que los ejes Y e Y_1. Dicho de otro modo, los ejes de $\mathscr{R}_1$ resultan de aplicar a los de $\mathscr{R}$ un giro de centro O y amplitud α.



(Fig. 11)

Sea P un punto de $\mathscr{E}_2$; entonces:

$[\overrightarrow{OP}] = x\,\vec{u}_1 + y\,\vec{u}_2 = x_1\,\vec{v}_1 + y_1\,\vec{v}_2$, siendo (x, y) las coordenadas de P respecto de $\mathscr{R}$ y (x_1, y_1) las coordenadas de P respecto de $\mathscr{R}_1$.

Por ser (x, y) las coordenadas del vector $[\overrightarrow{OP}]$ respecto de la base B y (x_1, y_1) las coordenadas del vector $[\overrightarrow{OP}]$ respecto de la base B_1, el cálculo del par (x_1, y_1) conocido el par (x, y) se reduce a encontrar las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base B_1 y aplicar a continuación las fórmulas de cambio de base.

Supongamos que $\vec{u}_1 = a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2$ y $\vec{u}_2 = a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2$

Por ser $(\vec{u}_1, \vec{v}_1) = (\vec{u}_2, \vec{v}_2) = \alpha$, resulta (Fig. 12) que

$(\vec{u}_1, \vec{v}_2) = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$ y $(\vec{v}_1, \vec{u}_2) = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, de donde:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 = |\vec{u}_1||\vec{v}_1| \cos \alpha = \cos \alpha$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{u}_2||\vec{v}_2| \cos \alpha = \cos \alpha$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{u}_1||\vec{v}_2| \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2 = |\vec{v}_1||\vec{u}_2| \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{sen} \alpha$$

Por otra parte:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 = (a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 = a_{11}(\vec{v}_1)^2 + a_{12}\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = a_{11}$$

En consecuencia, $a_{11} = \cos \alpha$.

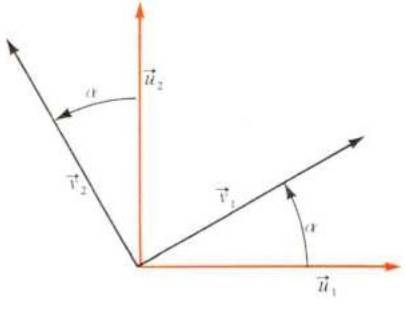
Análogamente,

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_2 = (a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2) \cdot \vec{v}_2 = a_{21}\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + a_{22}(v_2)^2 = a_{22},$$

luego $a_{22} = \cos \alpha$; de igual forma,

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 = (a_{11}\vec{v}_1 + a_{12}\vec{v}_2) \cdot \vec{v}_2 = a_{11}\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + a_{12}(\vec{v}_2)^2 = a_{12},$$

de donde $a_{12} = -\operatorname{sen} \alpha$.



(Fig. 12)

Finalmente,

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{v}_1 \,(a_{21}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2) = a_{21}(\vec{v}_1)^2 + a_{22}\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = a_{21},$$

luego $a_{21} = \operatorname{sen} \alpha$

En resumen: $\vec{u}_1 = (\cos \alpha)\,\vec{v}_1 - (\operatorname{sen} \alpha)\,\vec{v}_2$

y $\quad \vec{u}_2 = (\operatorname{sen} \alpha)\,\vec{v}_1 + (\cos \alpha)\,\vec{v}_2$

Entonces, por las fórmulas de cambio de base:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = (\mathbf{cos}\ \alpha)\mathbf{x} + (\mathbf{sen}\ \alpha)\mathbf{y} \\ \mathbf{y}_1 = -(\mathbf{sen}\ \alpha)\mathbf{x} + (\mathbf{cos}\ \alpha)\mathbf{y} \end{cases}$$

Ejemplos:

- Sean $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dos bases ortonormales de $\mathbf{V}^2$ tales que $(\vec{u}_1, \vec{v}_1) = (\vec{u}_2, \vec{v}_2) = \dfrac{\pi}{3}$

  Sea O un punto de $\mathscr{E}_2$ y consideremos los sistemas de referencia $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $\mathscr{R}_1 = \{O_1; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ (Fig. 13). El punto P de coordenadas $(3, -8)$ respecto de $\mathscr{R}$ tiene las coordenadas (x_1, y_1) respecto de $\mathscr{R}_1$, en donde

$$x_1 = \left(\cos \frac{\pi}{3}\right) 3 + \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)(-8) = \frac{3 - 8\sqrt{3}}{2}$$

$$y_1 = -\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right) 3 + \left(\cos \frac{\pi}{3}\right)(-8) = \frac{-3 - 8\sqrt{3}}{2}$$

5.2. Ahora vamos a calcular las coordenadas de un punto P cuando a los ejes se les aplica una traslación y a continuación un giro.

Sea P el punto de coordenadas (2, 7) respecto de unos ejes cartesianos rectangulares XY de origen Q.

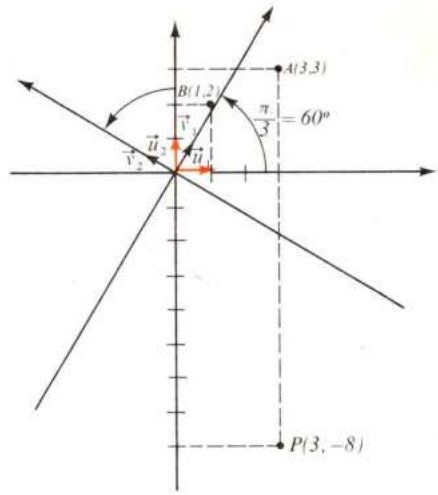
Si trasladamos los ejes al punto O_1 de coordenadas (3, 5) (Fig. 14), las nuevas coordenadas de P (x_1, y_1) son

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 3 = -1 \\ y_1 = 7 - 5 = 2 \end{cases}$$

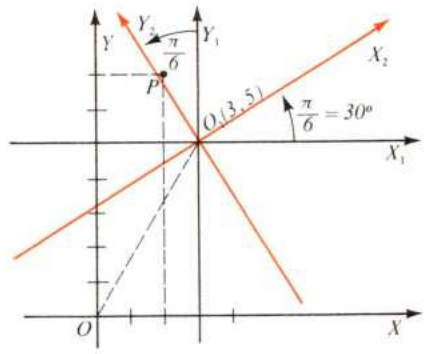
Si a estos nuevos ejes les aplicamos un giro de centro O_1 y amplitud $\dfrac{\pi}{6}$, las coordenadas (x_2, y_2) de P respecto de estos nuevos ejes vienen dadas por:

$$x_2 = (-1)\cos \frac{\pi}{6} + 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$y_2 = (-1)\left(-\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}$$



(Fig. 13)



(Fig. 14)

14. De acuerdo con la figura 13, halla las coordenadas de los puntos A y B, respecto de $\mathscr{R}_1 = \{O_1; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

15. De acuerdo con la figura 13, halla las coordenadas (x_1, y_1) respecto de $\mathscr{R}_1 = \{O_1; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de un punto P cuyas coordenadas respecto de $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ son $(a, 3a)$, siendo a un número real.

16. Sean $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $\mathscr{R}_1 = \{O_1; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dos sistemas de referencia ortonormales tales que $(\vec{u}_1, \vec{v}_1) = (\vec{u}_2, \vec{v}_2) = \dfrac{\pi}{4}$. Calcula las coordenadas respecto de $\mathscr{R}$ de un punto de coordenadas $(-1, 14)$ respecto de $\mathscr{R}_1$.

Ejercicios y cuestiones

17. Sean $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dos bases ortogonales de $\mathbf{V}^2$ tales que $(\vec{u}_1, \vec{v}_1) = (\vec{u}_2, \vec{v}_2) = \frac{\pi}{4}$, $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = 2$ y $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = 3$.

Si $\vec{v}$ es un vector tal que $\vec{v} = 3\vec{u}_1 + 8\vec{u}_2$, calcula su expresión respecto de la base B_2.

18. Con las referencias del ejercicio **17**, sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores tales que $\vec{a} = 8\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$ y $\vec{b} = 7\vec{u}_1 - 6\vec{u}_2$.

Calcula la expresión de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$; $\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{a} - \vec{b}$; $3\vec{a} - 6\vec{b}$; $8\vec{a} + 14\vec{b}$ respecto de la base B_2.

19. Sean $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dos bases de $\mathbf{V}^2$ tales que $\vec{u}_1 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ y $\vec{u}_2 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$. Si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son vectores tales que $\vec{a} = 3\vec{u}_1 + 8\vec{u}_2$, $\vec{b} = 4\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$ y $\vec{c} = 2\vec{u}_1$, calcula la expresión de los vectores, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c})$ y $8\vec{a} + 3\vec{b} - 7\vec{c}$ respecto de la base B_2.

20. Sea $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ un sistema de referencia afín euclídeo tal que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \frac{\pi}{3}$ y $|\vec{u}_2| = 2|\vec{u}_1|$.

Representa, según el sistema de referencia $\mathscr{R}$, los puntos cuyas coordenadas son respectivamente (8, 4), (3, 2), (7, 9), (−1, −2), (1, 1).

21. Considera el sistema de referencia $\mathscr{R} = \{O; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, donde $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base ortogonal y $|\vec{v}_1| = 3|\vec{v}_2|$. Representa los puntos cuyas coordenadas respecto de $\mathscr{R}$ son, respectivamente, (3, 5), (−2, 6), (8, 7), (3, −9), (1, 1), (1, −1) y (−1, 1).

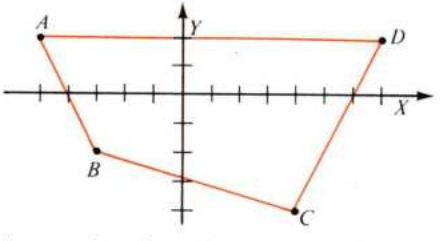
22. Si $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es un sistema de referencia tal que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \frac{\pi}{2}$ y $|\vec{u}_1| = 2|\vec{u}_2|$, el cuadrilátero $ABCD$ cuyos vértices tienen, respectivamente, por coordenadas (1, 1), (1, −1), (−1, −1), (−1, 1), ¿es un paralelogramo? ¿es un cuadrado?

23. Sean $\vec{v}$ y $\vec{\omega}$ dos vectores de $\mathbf{V}^2$; considera las traslaciones $T_{\vec{v}}$ y $T_{\vec{\omega}}$ y demuestra que $T_{\vec{\omega}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}+\vec{\omega}}$, donde $T_{\vec{\omega}} \circ T_{\vec{v}}$ es la aplicación compuesta de $T_{\vec{v}}$ y $T_{\vec{\omega}}$.

24. Sean $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ un sistema de referencia y $\vec{v} = 4\vec{u}_1 - 8\vec{u}_2$. Considera los puntos de coordenadas (12, 6), (4, −3), (7, 2), (8, 3) y calcula las coordenadas de sus imágenes por la traslación $T_{\vec{v}}$.

25. Sea $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ un sistema de referencia y considera los puntos $P(3, 5)$ y $Q(7, 3)$. Calcula el vector $\vec{v}$ tal que $T_{\vec{v}}(P) = Q$.

26. De acuerdo con la figura de la derecha, calcula las coordenadas de los vértices del cuadrilátero $ABCD$ si trasladamos los ejes de manera que el nuevo origen sea el punto D.



27. Sean $\mathscr{R} = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $\mathscr{R}_1 = \{O_1; \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ dos sistemas de referencias ortonormales tales que $(\vec{u}_1, \vec{v}_1) = (\vec{u}_2, \vec{v}_2) = \frac{\pi}{12}$ y O_1 tiene de coordenadas (4, 4) respecto de $\mathscr{R}$.

Considera los puntos (0, 0), (2, 2), (−4, −4) y (3, 7) expresados por sus coordenadas respecto de $\mathscr{R}$ y calcula sus coordenadas respecto de $\mathscr{R}_1$.

Tema 7

LA RECTA EN EL PLANO. CONDICIONES DE ORTOGONALIDAD

El curso pasado has estudiado que una recta en el plano queda determinada por un punto y su vector de dirección. En este tema, después de un breve repaso de lo que ya conoces, veremos que una recta queda determinada por un punto y un vector perpendicular a ella, que recibe el nombre de vector asociado. Por otra parte, veremos cómo los vectores asociados a una recta permiten llegar a una nueva expresión de la ecuación de la recta: la ecuación normal, en donde todos los coeficientes tienen un claro significado geométrico.

1 Ecuaciones de la recta

En los seis primeros apartados de este epígrafe nos limitamos a recordar cuestiones del curso anterior.

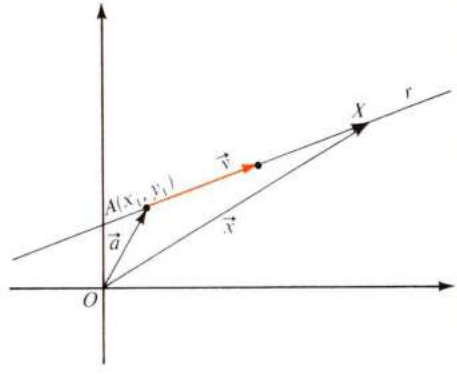
1.1. Sea $A(x_1, y_1)$ un punto de la recta r y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un vector de dirección de r. Todo punto X de r determina con A un vector $\overrightarrow{AX}$ tal que $\overrightarrow{AX} = t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$ (Fig. 1), es decir, $\vec{x} - \vec{a} = t\vec{v}$ [1], donde $\vec{a}$ es el vector de posición del punto A y $\vec{x}$ el vector de posición del punto X.

La relación [1] se llama ecuación vectorial de la recta. De la ecuación vectorial (2.º B.U.P. **Santillana**) se deducen las siguientes ecuaciones:

Ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = x_1 + tv_1 \\ y = y_1 + tv_2 \end{cases}$

Ecuación continua $\dfrac{x - x_1}{v_1} = \dfrac{y - y_1}{v_2}$; si $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$

Ecuación general: $Ax + By + C = 0$, donde A y B no son simultáneamente nulos.



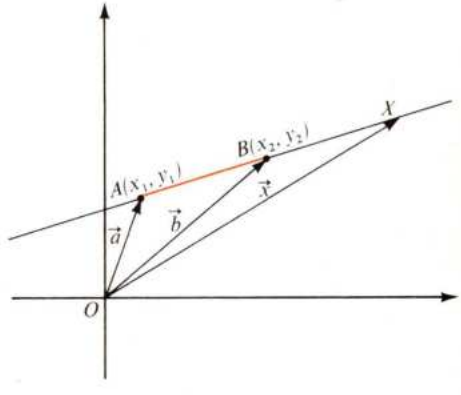
(Fig. 1)

1.2. Si $A\ (x_1, y_1)$ y $B\ (x_2, y_2)$ son dos puntos del plano (Fig. 2), el vector $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ es un vector de dirección de la recta que determinan A y B; luego su ecuación será:

$$\overrightarrow{AX} = \lambda\, \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{x} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$

Pasando a las coordenadas, resulta $\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1) \end{cases}$

Si $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, la ecuación se puede escribir en la forma $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$



(Fig. 2)

1.3. Si $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es el vector de dirección de una recta r y $v_1 \neq 0$, la pendiente m de r viene definida por $m = \dfrac{v_2}{v_1}$

En la recta de la ecuación $Ax + By + C = 0$ el vector de dirección es $(-B, A)$ (2.º B.U.P. **Santillana**).

En el caso de que $B \neq 0$, la pendiente de la recta es $m = -\dfrac{A}{B}$.

En la figura 3 se observa que $m = tg\alpha$, donde α es el ángulo que forma el eje OX con el vector $\vec{v}$, o, lo que es lo mismo, el ángulo que forma el sentido positivo del eje OX con la recta r.

1.4. Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son dos puntos del plano, la pendiente de la recta r que determinan es $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ si $x_2 \neq x_1$, y la ecuación de r es $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Haciendo $b = -m\,x_1 + y_1$ resulta $y = mx + b$, llamada *ecuación explícita* de la recta.

1.5. Sean dos rectas r y r' de ecuaciones:

$$r \longrightarrow y = mx + b$$

$$r' \longrightarrow y = m'x + b'$$

Si $m = m'$, entonces r y r' son paralelas.

1.6. Sean r y r' las rectas de ecuaciones

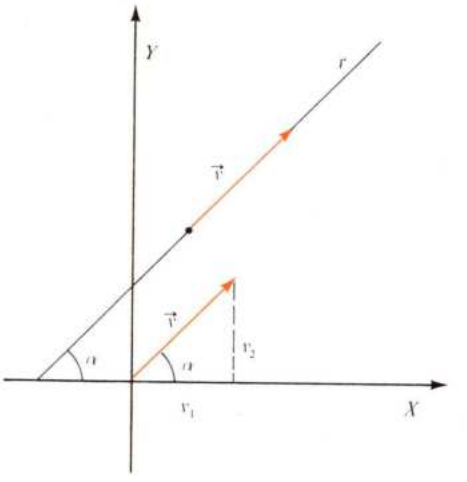
$$r \equiv Ax + By + C = 0$$

$$r' \equiv A'x + B'y + C' = 0$$

cuyos vectores de dirección son $\vec{v} = (-B, A)$ y $\vec{v}'_1 = (-B', A')$, respectivamente (2.º B.U.P. **Santillana**).

Si $r \| r'$, los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ tienen la misma dirección; en consecuencia, $\vec{v}$ y $\vec{v}'$ son proporcionales, $\vec{v} = \lambda\vec{v}'$ con $\lambda \neq 0$, es decir, $(-B, A) = \lambda(-B', A') = (-\lambda B', \lambda A')$, de donde $A = \lambda A'$ y $\lambda B' = B$.

Multiplicando las dos igualdades se tiene: $\lambda AB' = \lambda A'B$, y dividiendo por $\lambda \neq 0$, resulta: $AB' - A'B = 0$, que es la condición de paralelismo de rectas.



(Fig. 3)

Ejercicios:

1. Halla las ecuaciones vectorial, paramétricas, continua y general de la recta que pasa por el punto $A(1, 2)$ y cuyo vector de dirección es $(2,5)$.

2. Dados los puntos $A(2, 7)$, $B(-1, 3)$, halla:
   a) el vector de dirección de la recta r que determinan,
   b) la pendiente de r,
   c) la ecuación de r.

3. ¿Son paralelas las rectas de ecuaciones $3x + 2y + 8 = 0$ y $6x + 4y - 6 = 0$?

4. Halla el valor de a para que las rectas $14x + 12y - 6 = 0$ y $-7x + ay + 12 = 0$ sean paralelas.

5. Halla la ecuación de la recta r que pasa por el punto $(1, 4)$ y es paralela a la recta de ecuación $5x + 2y - 8 = 0$.

6. Comprueba que los vectores $\vec{u} = (4, 5)$ y $\vec{v} = (12, 15)$ tienen la misma dirección.

Ejemplos:

- Las rectas de ecuaciones $2x-5y+6=0$ y $4x-10y+1=0$ son paralelas, ya que: $2(-10)-4(-5)=0$

- La ecuación de la recta r que pasa por el punto $(2, 1)$ y es paralela a la recta de ecuación $5x+6y-8=0$ es de la forma $5x+6y+k=0$; como pasa por $(2, 1)$, $5\cdot 2+6\cdot 1+k=0$, $k=-16$; luego la ecuación de r es: $5x+6y-16=0$.

1.7. Vamos a obtener en este apartado la ecuación general de la recta utilizando condiciones de ortogonalidad.

Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares de origen O y sean P el punto de coordenadas (x_1, y_1) y $\vec{v}$ el vector no nulo de coordenadas (A, B). Vamos a ver que el conjunto de todos los puntos X de coordenadas (x, y) tales que el vector $[\overrightarrow{PX}]$ es ortogonal a $\vec{v}$ es una recta. En efecto, este conjunto se puede expresar mediante la ecuación

$[\overrightarrow{PX}]\cdot\vec{v}=0$, o, lo que es lo mismo, $([\overrightarrow{OX}]-[\overrightarrow{OP}])\cdot\vec{v}=0$ (Fig. 4)

Por ser $(x-x_1, y-y_1)$ las coordenadas del vector $[\overrightarrow{OX}]-[\overrightarrow{OP}]$ se tiene que $(x-x_1)A+(y-y_1)B=0$.

Llamando $C=-Ax_1-By_1$, la igualdad anterior toma la forma: $Ax+By+C=0$, ecuación que, como se ha visto, representa una recta que pasa por el punto (x_1, y_1), y cuyo vector de dirección es ortogonal al vector $\vec{v}$ de coordenadas (A, B).

El vector $\vec{v}$ de coordenadas (A, B) es el vector *asociado* o vector perpendicular a la recta de ecuación $Ax+By+C=0$.

Ejemplos:

- La ecuación de la recta s que pasa por el punto P de coordenadas $(9, -2)$, y cuyo vector de dirección es ortogonal al vector de coordenadas $(3, -7)$, es de la forma

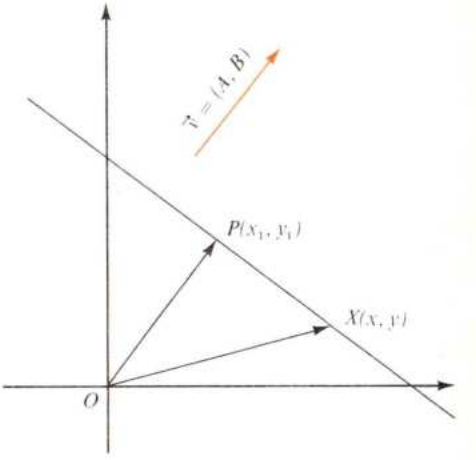
$$3(x-9)+(-7)\big(y-(-2)\big)=0$$

es decir: $3x-7y-41=0$

- Si un vector asociado a una recta r tiene por coordenadas $(7, 0)$ y la recta pasa por el punto $(-2, 7)$, su ecuación será $7\big(x-(-2)\big)+0\,(y-7)=0$, es decir:

$$7x+14=0, \text{ o bien: } x+2=0$$

- Un vector asociado al eje x es $(0, 1)$, luego su ecuación es de la forma $0(x-0)+1(y-0)=0$, es decir, $y=0$.



(Fig. 4)

7. Dada la recta r de ecuación $2(x-5)+6(1+6)=0$, determina, sin hacer operaciones, un punto de r y las coordenadas de su vector asociado.

8. Escribe la ecuación de la recta que pasa por el origen y cuyo vector de dirección es ortogonal al vector de coordenadas $(10, 9)$.

9. Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $(8, 3)$ y tiene al vector de coordenadas $(8, 3)$ como vector asociado.

10. Razona por qué el eje de ordenadas tiene por ecuación $x=0$.

11. Representa la recta que pasa por el punto $(4, -2)$ y tiene al vector de coordenadas $(13, 7)$ como vector asociado.

12. Calcula la ecuación de la recta r que pasa por el punto $(8, 3)$ y tiene al vector de coordenadas $(1, 0)$ como vector asociado. ¿Pertenece el punto $(6, 7)$ a la recta r?

1.8. Hemos visto que la ecuación de la recta que pasa por un punto $P(x_1, y_1)$ y es perpendicular a un vector $\vec{v}$ es $[\overrightarrow{PX}] \cdot \vec{v} = 0$, donde X es un punto genérico de la recta (Fig. 5).

Consideremos un vector $\vec{u}$ de la misma dirección que $\vec{v}$, es decir, $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, con $\lambda \neq 0$; la ecuación de la recta que pasa por el punto P y es perpendicular a $\vec{u}$ es $[\overrightarrow{PX}] \cdot \vec{u} = 0$, es decir, $[\overrightarrow{PX}] \cdot \lambda\vec{v} = 0$; multiplicando por λ^{-1}, resulta:

$$[\overrightarrow{PX}] \cdot \vec{v} = 0$$

En consecuencia, una recta queda determinada por un punto y un vector cualquiera perpendicular a ella, o, lo que es lo mismo, por un punto y la dirección de uno de sus vectores asociados.

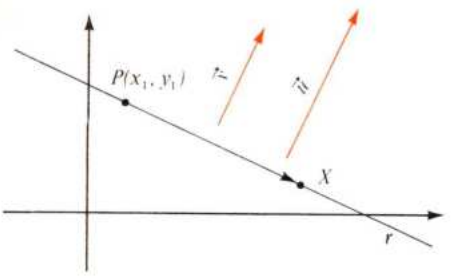
Ejemplo:

- La ecuación de una recta que pasa por el punto (3, 4), y de la cual $\vec{v} = (2, 1)$ es un vector asociado, es:

  $$2 \cdot (x-3) + 1 \cdot (x-4) = 0, \text{ es decir, } 2x + y - 10 = 0$$

  Si tomamos como vector asociado de la recta el vector $\vec{u} = 2\vec{v} = (4, 2)$, la ecuación será: $4(x-3) + 2(y-4) = 0$.

  Simplificando: $2x + y - 10 = 0$



(Fig. 5)

13. Razona por qué la recta de ecuación $y = 4$ tiene el vector de coordenadas (0, 1) como vector asociado.

14. Determina un vector asociado a la recta de ecuación $4x + 8y + 7 = 0$ distinto del vector de coordenadas (4, 8).

15. Si $\vec{u}$ es el vector de dirección de la recta de ecuación $2x - 3y + 12 = 0$, escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-8, -3)$ y tiene al vector $7\vec{u}$ como vector asociado.

2 Condición de perpendicularidad

2.1. Sean r y r' dos rectas perpendiculares (Fig. 6):

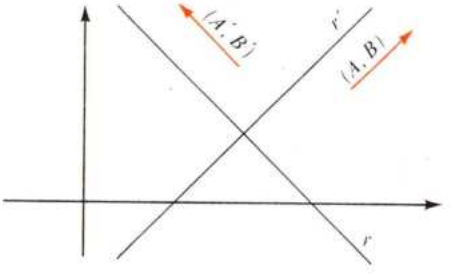
$$r \equiv Ax + By + C = 0; \quad r' \equiv A'x + B'y + C' = 0$$

Los vectores (A, B) y (A', B'), perpendiculares a r y r', respectivamente, deben ser perpendiculares entre sí, y, por tanto, su producto escalar será 0, es decir: $AA' + BB' = 0$.

Esta expresión es la condición de perpendicularidad de las rectas r y r'.

Si B y B' son distintos de cero, podemos dividir por BB' y se tiene: $\frac{A}{B} \cdot \frac{A'}{B'} + 1 = 0$, o, lo que es lo mismo, $\left(-\frac{A}{B}\right) \cdot \left(-\frac{A'}{B'}\right) = -1$.

Como las pendientes de r y r' son $m = \frac{-A}{B}$ y $m' = \frac{-A}{B'}$ respectivamente, resulta: $m \cdot m' = -1$, que es la condición de perpendicularidad de dos rectas expresada mediante sus pendientes.



(Fig. 6)

16. Razona por qué una recta no es perpendicular a sí misma.

17. Determina una recta paralela y una recta perpendicular a la recta de ecuación

$$-4x + 2y + 7 = 0$$

Ejemplos:

- La recta de ecuación $8x - 4y + 6 = 0$ es perpendicular a la recta de ecuación $6x + 12y - 13 = 0$

  En efecto: $8 \cdot 6 + (-4) \cdot 12 = 0$

- La recta de ecuación $12x - 7y + 6 = 0$ es perpendicular a la recta $7x + 12y + 6 = 0$, ya que $12 \cdot 7 + (-7) \cdot 12 = 0$

- Las rectas $r \equiv 3x + 4y - 8 = 0$ y $r' \equiv -8x + 6y + 7 = 0$ son perpendiculares, ya que $m \cdot m' = \frac{-3}{4} \cdot \frac{8}{6} = -1$

2.2. *Recta que pasa por un punto y es perpendicular a una dada*
Sean $r \equiv Ax + By + C = 0$ la recta dada y $P(x_1, y_1)$ el punto (Fig. 7). La recta s perpendicular a r que pasa por $P(x_1, y_1)$ tendrá por vector asociado un vector perpendicular al (A, B).

Como el vector $(-B, A)$ es perpendicular al (A, B), resulta que s tendrá por ecuación $(x - x_1)(-B) + (y - y_1)A = 0$,

es decir, $B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0$

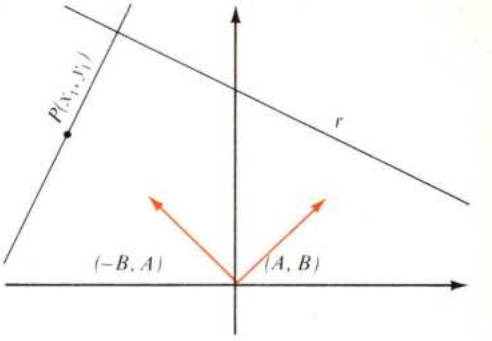
Ejemplos:

- Sea la recta r de ecuación $2x + 8y + 7 = 0$ y el punto P de coordenadas $(2, -2)$. La recta s perpendicular a r, y que pasa por el punto $(2, -2)$, es de la forma

  $8(x - 2) - 2(y + 2) = 0$, es decir, $8x - 2y - 20 = 0$

- Consideremos la recta de ecuación $x + y - 6 = 0$ y el punto $(1, -2)$. La recta perpendicular a la dada y que pasa por el punto $(1, -2)$ tiene por ecuación

  $-1(x - 1) + 1(y + 2) = 0$, es decir, $-x + y + 1 = 0$



(Fig. 7)

18. Escribe la ecuación de una recta perpendicular a la recta de ecuación $3x - 2y + 1 = 0$.

19. Escribe la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta de ecuación $8x + 3y - 2 = 0$

20. Determina la recta que pasa por el punto $(4, -6)$, es perpendicular a la recta que pasa por el punto $(8, 2)$ y tiene como vector asociado el vector de coordenadas $(3, 7)$.

21. Dada la recta de ecuación $4x - 2y + 9 = 0$, determina una recta paralela y otra perpendicular a ella que pasen por el punto $(2, -1)$.

Averigua si alguna de ellas pasa por el punto $(2, 7)$.

3 Distancia de un punto a una recta

3.1. Consideremos un punto P de coordenadas (x_1, y_1) y una recta r de ecuación $Ax + By + C = 0$.

Se llama distancia d del punto P a la recta r al módulo del vector determinado por el punto P y el pie de la perpendicular trazada desde P a la recta r.

Entonces $d = d(P, Q) = \left| [\overrightarrow{PQ}] \right|$, en donde Q es el punto de r tal que el vector $[\overrightarrow{PQ}]$ es proporcional a un vector asociado a r, en particular al vector $\vec{v} = (A, B)$

Si (x_2, y_2) son las coordenadas del punto Q, las coordenadas del vector $[\overrightarrow{PQ}]$ son $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Entonces:

$$\vec{v} \cdot [\overrightarrow{PQ}] = A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = Ax_2 + By_2 - Ax_1 - By_1$$

Como (x_2, y_2) es un punto de r, $Ax_2 + By_2 = -C$, luego

$$\vec{v} \cdot [\overrightarrow{PQ}] = -Ax_1 - By_1 - C \text{ (Fig. 8)}$$

Por otra parte, como $\vec{v}$ y $[\overrightarrow{PQ}]$ tienen la misma dirección,

$$\vec{v} \cdot [\overrightarrow{PQ}] = \pm |\vec{v}| \, |[\overrightarrow{PQ}]| = \pm |\vec{v}| d = \pm (\sqrt{A^2 + B^2}) d$$

Igualando las dos expresiones del producto escalar, se tiene que $-Ax_1 - By_1 - C = \pm (\sqrt{A^2 + B^2})\, d$, de donde por ser d un número no negativo

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \qquad [1]$$

Ejemplos:

- Sean la recta $4x - 3y + 2 = 0$ y el punto $P(5, 7)$; entonces la distancia d de P a la recta dada es:

$$d = \left| \frac{4 \cdot 5 + (-3) \cdot 7 + 2}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{25}} \right| = \frac{1}{5}$$

- Sea el triángulo de vértices $A(-2, 0)$, $B(6, -1)$ y $C(3, 1)$; entonces la recta AB tiene por ecuación $x + 8y + 2 = 0$

  La longitud h de la altura correspondiente al vértice C es la distancia de C a la recta AB, luego

$$h = \left| \frac{3 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 2}{\sqrt{1^2 + 8^2}} \right| = \left| \frac{13}{\sqrt{65}} \right| = \frac{13}{\sqrt{65}}$$

  Por otra parte tenemos que la longitud del lado AB es $\sqrt{(-2-6)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{65}$,

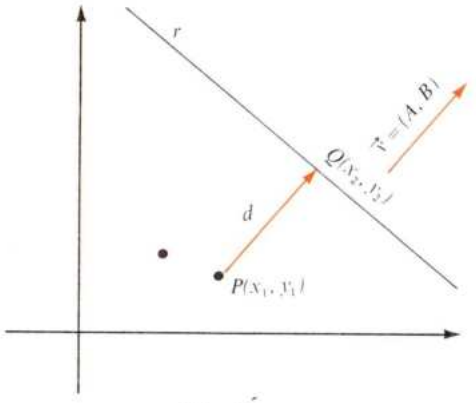
  luego el área S del triángulo será:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{65} \frac{13}{\sqrt{65}} = \frac{13}{2}$$

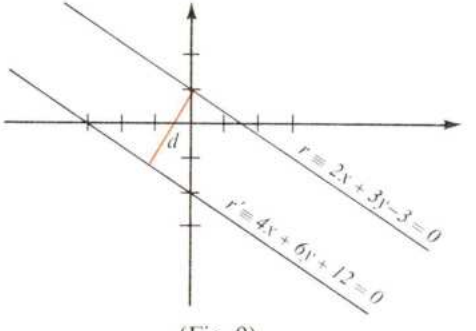
- Las rectas $r \equiv 2x + 3y - 3 = 0$ y $r' \equiv 4x + 6y + 12 = 0$ son paralelas, ya que $2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 0$.

  Para calcular la distancia entre r y r' elegimos un punto de una de ellas, por ejemplo el punto $P(0, 1)$ de r, y hallamos su distancia d a la recta r' (Fig. 9):

$$d = \left| \frac{4 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 12}{\sqrt{4^2 + 6^2}} \right| = \left| \frac{18}{\sqrt{52}} \right| = \frac{16}{2\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}}$$



(Fig. 8)



(Fig. 9)

22. Razona por qué la distancia de un punto a una recta no puede ser un número negativo.

23. En la expresión [1] razona qué representa $\sqrt{A^2 + B^2}$

24. Calcula la distancia del punto (4, 3) a las rectas de ecuación $8x + 7y + 2 = 0$ y $4x - y + 3 = 0$.

25. Si P es un punto perteneciente a una recta r, calcula la distancia de P a r.

26. Considera el triángulo ABC rectángulo en B. Sabiendo que la recta BC tiene por ecuación $2x + 7y - 11 = 0$, calcula la ecuación de la recta AB sabiendo que el punto A es el punto de coordenadas (1, 1).

Calcula asimismo el cateto AB.

3.2. Si el punto P es el origen, entonces resulta que la distancia d_0 de la recta r al origen es:

$$d_0 = \left| \frac{0 \cdot A + 0 \cdot B + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Ejemplo:

- La distancia d_0 de la recta, de ecuación $2x - 5y + 3 = 0$, al origen de coordenadas es $d_0 = \left| \frac{3}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} \right| = \frac{3}{\sqrt{29}}$

27. Calcula la distancia del origen a las siguientes rectas:

$7x - y + 17 = 0$

$4x + 3y = 0$

$2x - 6y + 5 = 0$

4 Ecuación normal de la recta

4.1. Sea r la recta de ecuación $Ax + By + C = 0$.

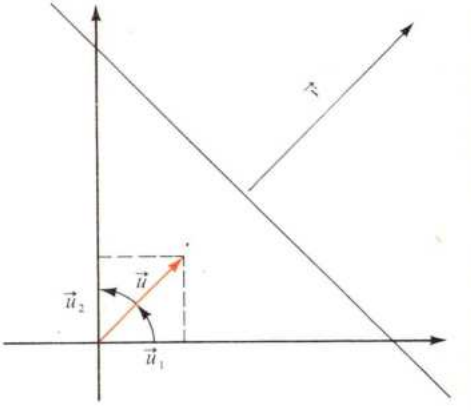
El vector $\vec{v}$ de coordenadas (A, B) es uno de los vectores asociados a r. El vector $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ es, como sabemos, un vector unitario asociado también a r y que tiene por coordenadas

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$

Sea $\vec{u}_1$ el vector de coordenadas $(1, 0)$ y $\vec{u}_2$ el vector de coordenadas $(0, 1)$ (Fig. 10). Entonces:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u} = |\vec{u}_1||\vec{u}| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}) = \cos(\vec{u}_1, \vec{u})$$

y $$\vec{u} \cdot \vec{u}_2 = |\vec{u}||\vec{u}_2| \cos(\vec{u}, \vec{u}_2) = \cos(\vec{u}, \vec{u}_2)$$



(Fig. 10)

Por otra parte,

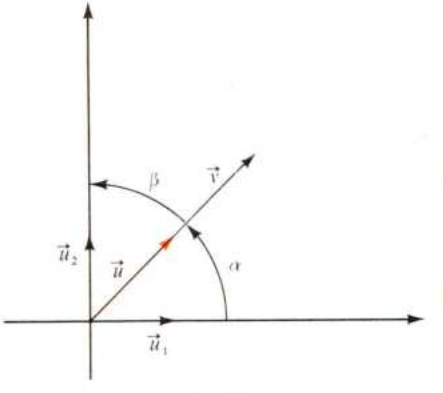
$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u} = 1 \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + 0 \cdot \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

y $$\vec{u} \cdot \vec{u}_2 = 0 \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + 1 \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Por tanto, $\cos(\vec{u}_1, \vec{u}) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ y $\cos(\vec{u}, \vec{u}_2) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Por tener $\vec{u}$ y $\vec{v}$ la misma dirección y el mismo sentido, $\cos(\vec{u}_1, \vec{v}) = \cos(\vec{u}_1, \vec{u}) = \cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ y

$\cos(\vec{u}, \vec{u}_2) = \cos(\vec{v}, \vec{u}_2) = \operatorname{sen}\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\beta$ (Fig. 11)



(Fig. 11)

Por ello, $\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ y $\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ se llaman los *cosenos directores* de la recta $Ax + By + C = 0$.

Si dividimos la ecuación inicial de r por $\sqrt{A^2 + B^2}$, nos resulta:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

que es una expresión de su ecuación en donde, como hemos dicho, los coeficientes de x y de y son los cosenos directores de la recta, y el valor absoluto del término independiente $\left| \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$ es la distancia de r al origen de coordenadas.

Esta expresión de r, en la que todos los miembros tienen un significado geométrico, recibe el nombre de *ecuación normal* de la recta.

Ejemplo:

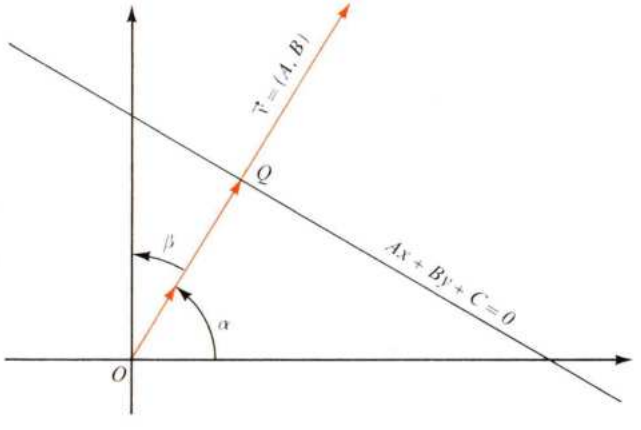
- Sea la recta $4x + 5y - 3 = 0$; su ecuación normal es

$$\frac{4}{\sqrt{4^2 + 5^2}} x + \frac{5}{\sqrt{4^2 + 5^2}} y + \frac{-3}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = 0,$$

es decir,

$$\frac{4}{\sqrt{41}} x + \frac{5}{\sqrt{41}} y - \frac{3}{\sqrt{41}} = 0$$

4.2. Sea $Ax + By + C = 0$ una recta tal que el vector asociado $\vec{v}$ de coordenadas (A, B) es tal que $\vec{v} = \lambda\, [\overrightarrow{OQ}]$ en donde $\lambda > 0$ y Q es un punto de la recta (Fig. 12).



(Fig. 12)

28. Si la ecuación normal de una recta es $\frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y - 6 = 0$, calcula su distancia al origen de coordenadas.

29. Calcula la ecuación normal de la recta que tiene por ecuación $8x + 24y - 9 = 0$.

30. Calcula la ecuación normal de la recta que pasa por el punto (2, 7) y tiene al vector de coordenadas (12, 13) como vector asociado.

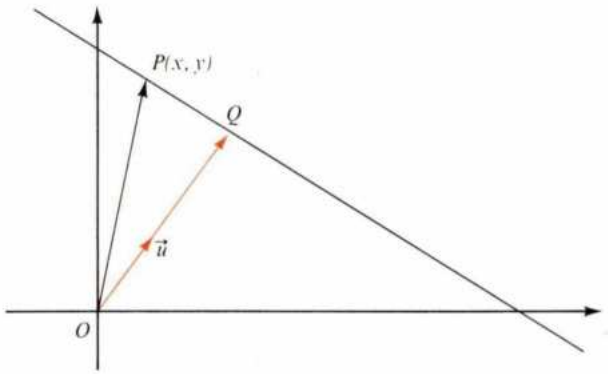
Entonces el módulo del vector $[\overrightarrow{OQ}]$ es precisamente la distancia d_0 del origen a la recta.

Como hemos visto, el vector asociado $\vec{u}$ de longitud unidad tiene de coordenadas $(\cos\alpha, \cos\beta)$,

por tanto:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{y} \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \operatorname{sen}\alpha$$

Si P es un punto cualquiera de la recta de coordenadas (x, y) (Fig. 13), $\vec{u} \cdot [\overrightarrow{OP}] = x\cos\alpha + y\cos\beta$.



(Fig. 13)

Por otra parte,

$$\vec{u} \cdot [\overrightarrow{OP}] = \vec{u} \cdot [\overrightarrow{OQ}] = 1 \cdot d_0 \cos 0 = 1 \cdot d = d_0$$

En consecuencia, se tiene que $x\cos\alpha + y\cos\beta - d_0 = 0$.

Es decir: estando el vector asociado a la recta como se ha indicado, el término independiente de la ecuación normal de la recta es igual a la distancia d_0 con signo cambiado.

Ejemplos:

- Si r es la recta que tiene por ecuación normal $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 8 = 0$, la distancia de r al origen es 8.
- Si la ecuación general de una recta r es $3x - 4y - 10 = 0$, su ecuación normal será: $\frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}}x - \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}}y - \frac{10}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0$, es decir, $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{10}{2} = 0$. Por tanto, la distancia del origen a la recta r es $d_0 = \frac{10}{2} = 5$

31. Escribe la ecuación de una recta que pasa por el origen y tiene por cosenos directores $\frac{1}{2}$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

32. Escribe la ecuación de una recta que tiene por cosenos directores $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y cuya distancia al origen es 2.

33. ¿Cuáles son los cosenos directores del eje y?

34. Escribe la ecuación normal de la recta de ecuación $-5x + 12y - 2 = 0$.

¿Cuál es su distancia al origen?

¿Cuáles son los cosenos directores de su vector asociado?

35. Los cosenos directores de un vector asociado a la recta son, respectivamente, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\frac{1}{2}$. Escribe la ecuación de la recta sabiendo que la distancia al origen de coordenadas es 5.

Ejercicios y cuestiones

36. Escribe tres vectores ortogonales al vector de coordenadas $(8, -7)$ y tres vectores con la misma dirección que el vector de coordenadas $(10, -1)$.

37. Calcula a para que el vector $(7, a)$ sea ortogonal al vector $(12, -8)$.

38. Averigua si los puntos $(3, 8)$, $(4, 3)$, $(2, 1)$, $(-9, -2)$ y $(13, 12)$ pertenecen a la recta de ecuación $2x + 3y - 7 = 0$.

39. Determina una recta paralela y otra perpendicular a la recta que pasa por el punto $(7, 3)$ y tiene como vector asociado el vector de coordenadas $(8, -9)$.

40. Un rectángulo $ABCD$ es tal que la recta CD tiene por ecuación $3x + 2y - 6 = 0$ y el vértice A tiene de coordenadas $(2, -7)$.

Calcula la ecuación de la recta AC sabiendo que el vértice D tiene de coordenadas $\left(11, \frac{-27}{2}\right)$. Calcula el perímetro del rectángulo.

41. Considera el triángulo ABC, en donde la recta AB tiene por ecuación $x - 12y + 6 = 0$ y el vértice C tiene por coordenadas $(1, 1)$.

Calcula la ecuación de la recta altura correspondiente al lado AB y la longitud del segmento altura correspondiente al vértice C.

42. Calcula la distancia al origen de cada una de las siguientes rectas: $8x + 12y - 25 = 0$, $7(x + 6) + 12(y - 7) = 0$, $3x + 4(y + 8) = 0$, $7(x + 5) + 7y = 0$.

43. Calcula la distancia del punto $(7, 2)$ a cada una de las rectas: $11x + 21y - 6 = 0$, $4x + 5y = 0$, $3x + 8y - 2 = 0$, $3x + 12y - 14 = 0$.

44. Calcula los cosenos directores de los vectores asociados a cada una de las siguientes rectas, así como su distancia al origen:

$$x = 8, x = -7, y = -4, y = 5, x - y = 2, x + y = 0, x - y = 3, x + y = 4, x - y = 0.$$

45. Determina una recta paralela y una recta perpendicular a la recta cuyos cosenos directores son, respectivamente, 1 y 0.

46. Escribe la ecuación normal de cada una de las siguientes rectas:

$$4x - y - 6 = 0, \quad 12x + 13y - 6 = 0$$
$$(x - 3) + 2(y - 1) = 0, \quad 7(x - 1) + 2(y + 1) = 0.$$

Tema 8 ANGULO FORMADO POR DOS RECTAS. BISECTRICES

Este tema está principalmente dedicado a estudiar los problemas derivados de la concurrencia de dos rectas. Así se estudia el ángulo formado por dos rectas y las bisectrices de los ángulos determinados por dos rectas secantes.

El tema comienza con la presentación del concepto de lugar geométrico, que, como veremos, sirve para sistematizar conceptos como el de mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo, etc. y que por otra parte utilizaremos en varios de los temas siguientes.

1 Lugares geométricos

Un lugar geométrico definido por una cierta propiedad es el conjunto de puntos del plano que verifican esa propiedad. Determinar un lugar geométrico es equivalente a determinar un conjunto de puntos mediante una propiedad característica.

Si L es un lugar geométrico definido por una propiedad p, se verifica:

a) todo punto de L posee la propiedad p,

b) todo punto que posee la propiedad p pertenece a L.

La condición b) puede sustituirse por la siguiente:

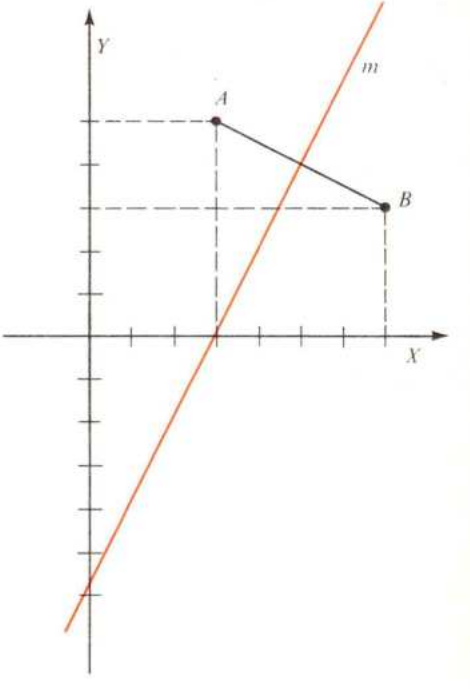
c) todo punto no perteneciente a L no posee la propiedad p.

Si un punto P de coordenadas (x, y) pertenece a un lugar geométrico L, la condición que debe cumplir dicho punto para pertenecer al lugar conduce a una ecuación entre las variables x e y llamada ecuación del lugar L.

Ejemplos:

- La mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos del segmento (Fig. 1), que, como sabes, es la recta perpendicular a $\overline{AB}$ y que pasa por su punto medio.

  Si A tiene de coordenadas (3, 5) y B (7, 3), veamos dos procedimientos para calcular la mediatriz m (Fig. 1)



(Fig. 1)

a) Si $P(x, y)$ es un punto de m, entonces $d(P, A) = d(P, B)$, o sea, $\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-3)^2}$, de donde $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 6y + 9$.

Simplificando:

$-4y + 8x - 24 = 0$, es decir, $y - 2x + 6 = 0$, que es la ecuación de la mediatriz m.

b) El vector de dirección de la recta AB es

$(7-3, 3-5) = (4, -2)$, luego su pendiente es $-\frac{1}{2}$.

Por tanto, la pendiente de toda recta perpendicular a AB es 2. (Ver tema 7).

Como el punto medio del segmento $\overline{AB}$ tiene de coordenadas $\left(\frac{3+7}{2}, \frac{5+3}{2}\right) = (5, 4)$, la ecuación de la mediatriz m resulta:

$$y - 4 = 2(x - 5), \text{ es decir, } y - 2x + 6 = 0$$

Ejercicios:

1. Calcula la mediatriz del segmento de extremos $A(2, -7)$ y $B(4, -10)$.

2. Sea el triángulo de vértices $A(2, 5)$, $B(0, 0)$ y $C(6, -3)$. Determina las tres mediatrices de sus lados.

3. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los vértices de un triángulo?

2 Angulo formado por dos rectas

2.1. Sean $r \equiv Ax + By + C = 0$ y $r' \equiv A'x + B'y + C' = 0$ dos rectas. Sabemos que el vector $\vec{v}$ de coordenadas (A, B) y el vector $\vec{\omega}$ de coordenadas (A', B') son vectores asociados, respectivamente, de las rectas r y r'.

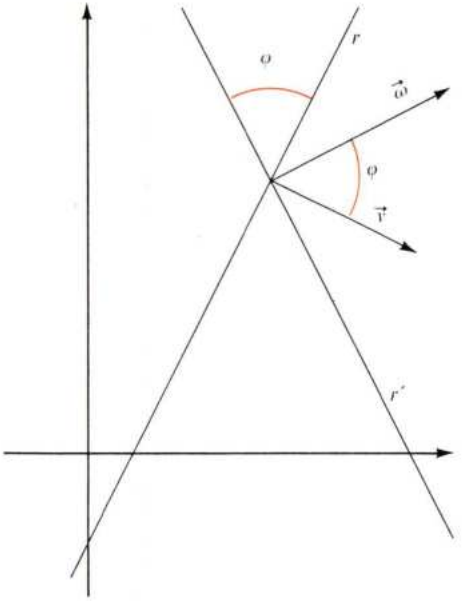
Asimismo, si $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1\vec{v}$ y $\lambda_2\vec{\omega}$ son también vectores asociados, respectivamente, de r y r'.

Como $\cos(\lambda_1\vec{v}, \lambda_2\vec{\omega}) = \dfrac{(\lambda_1\vec{v})\cdot(\lambda_2\vec{\omega})}{|\lambda_1\vec{v}||\lambda_2\vec{\omega}|} = \dfrac{\lambda_1\lambda_1(\vec{v}\cdot\vec{\omega})}{|\lambda_1\lambda_2||\vec{v}||\vec{\omega}|} =$

$= \dfrac{\lambda_1\lambda_2}{|\lambda_1\lambda_2|}\cos(\vec{v}, \vec{\omega})$, se verifica que $|\cos(\lambda_1\vec{v}, \lambda_2\vec{\omega})| =$

$= |\cos(\vec{v}, \vec{\omega})|$, es decir: dadas las rectas r y r', el valor absoluto del coseno de dos de sus vectores respectivamente asociados está unívocamente determinado. Por esta razón se define el ángulo que forman las rectas r y r' como el ángulo φ tal que $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ y $\cos\varphi = |\cos(\vec{v}, \vec{\omega})|$

Observa que, según esta definición, el ángulo que forman dos rectas es el ángulo que forman dos de sus vectores asociados o el suplementario (Fig. 2).



(Fig. 2)

2.2. Dadas $r \equiv Ax + By + C = 0$ y $r' \equiv A'x + B'y + C' = 0$, el vector $\vec{u}$ de coordenadas $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)$ es un vector unitario asociado a r, y, análogamente, el vector $\vec{u}'$ de coordenadas $\left(\frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}, \frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}\right)$ es un vector unitario asociado a r'. En consecuencia:

$$\cos \varphi = |\vec{u} \cdot \vec{u}'| = \left| \frac{AA' + BB'}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2}} \right| = \frac{|AA' + BB'|}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos \varphi = 0$; por tanto, $AA' + BB' = 0$, condición de perpendicularidad que ya conocemos.

Si $r \equiv Ax + By + C = 0$ es paralela a $r' \equiv A'x + B'y + C' = 0$, entonces $\varphi = 0$ y $\cos \varphi = 1$; por tanto:

$$|AA' + BB'| = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2},$$

de donde $A^2A'^2 + 2AA'BB' + B^2B'^2 = (A^2 + B^2)\ (A'^2 + B'^2)$; simplificando tenemos:

$2AA'BB' = A^2B'^2 + B^2A'^2$, es decir, $(AB' - BA')^2 = 0$, o, lo que es lo mismo, $AB' - BA' = 0$, condición que, como ya sabemos, es la de paralelismo (2.º B.U.P. **Santillana**).

Ejemplo:

- Sean las rectas $r \equiv x + y + 6 = 0$ y $r' \equiv x + 5y + 3 = 0$.

  Entonces $\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 5^2}} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = 0'8320.$

  El ángulo del primer cuadrante de coseno 0'8320 es 33º 18'; luego = 33º 18'.

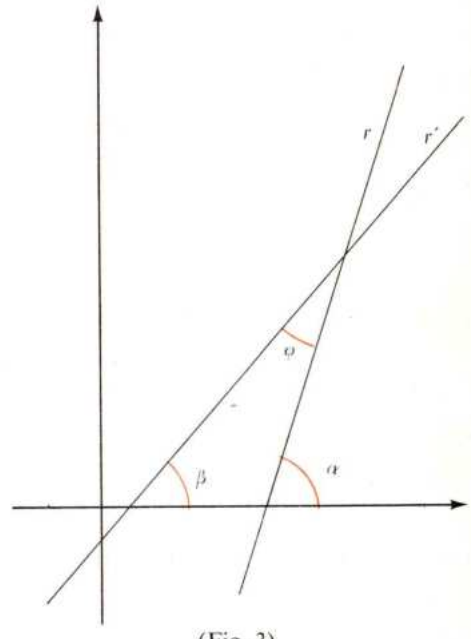
2.3. Sean las siguientes rectas: $r \equiv Ax + By + C = 0$ y $r' \equiv A'x + B'y + C' = 0$.

Entonces, si $B \neq 0$ y $B' \neq 0$ (Fig. 3), tenemos que:

$$m_1 = \text{tg } \alpha = \frac{-A}{B} \quad \text{y} \quad m_2 = \text{tg } \beta = -\frac{A'}{B'}$$

Según la figura 3, $\alpha = \beta + \varphi$, de donde $\varphi = \alpha - \beta$.

En consecuencia, $\text{tg } \varphi = \text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \text{ tg } \beta}$, de donde $\text{tg } \varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$. Si $\text{tg } \varphi < 0$, el ángulo que tomaremos es el suplementario de φ.



(Fig. 3)

4. Determina el ángulo formado por las rectas $4x - y - 1 = 0$ y $2x + 7y - 6 = 0$.

5. Calcula el valor de los ángulos del cuadrilátero de vértices $A\,(0, 6)$, $B\,(-1, 0)$, $C\,(0, -8)$ y $D\,(3, 0)$.

6. Halla las medianas del triángulo de vértices $A(4, 0)$, $B(-1, 6)$ y $C(1, -1)$ y calcula el ángulo que forma cada una de ellas con el lado que le es correspondiente.

7. En el triángulo del ejercicio anterior, halla la mediatriz del lado $\overline{AB}$ y calcula el ángulo que forma con la recta AC.

Ejemplo:

- Sean las rectas $r \equiv 2x + 3y - 2 = 0$ y $s \equiv x - 2y + 3 = 0$.

  Entonces, la pendiente de r es $m_1 = -\frac{2}{3}$ y la pendiente de s es $m_2 = \frac{1}{2}$. Por tanto:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{2}} = -\frac{7}{4} = -1'75,$$

  luego $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$; en consecuencia, el ángulo que forman r y s es el suplementario de φ, es decir, aquel cuya tangente es 1'75, o sea, 60° 15'.

8. A partir de la fórmula $\operatorname{tg}\varphi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$, deduce la condición de paralelismo de dos rectas.

9. Calcula el ángulo formado por las rectas $r \equiv 2x - 6y = 0$ y $m \equiv -x + 2y - 3 = 0$, en función de sus pendientes.

3 Bisectrices

Sean $r \equiv Ax + By + C = 0$ y $r' \equiv A'x + B'y + C' = 0$ dos rectas no paralelas. El lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las rectas r y r' está formado por dos rectas perpendiculares entre sí que se cortan en el mismo punto que r y r' y que, como sabes, son las bisectrices de los cuatro ángulos determinados por dichas rectas. (Fig. 4).

En efecto: si el punto P de coordenadas (x, y) es un punto de dicho lugar geométrico, la distancia de P a la recta r es la misma que la distancia de P a la recta r'; por tanto, las coordenadas (x, y) han de verificar:

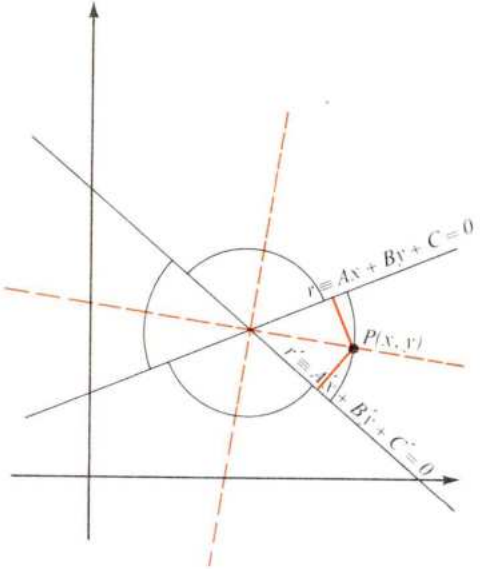
$$\left| \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} \right|$$

o, lo que es lo mismo, (x, y) ha de hacer cierta al menos una de las dos siguientes igualdades:

$$b_1 \equiv \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

$$b_2 \equiv \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{-A'x - B'y - C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}} \qquad [1]$$

Igualdades que representan dos rectas, como es fácil comprobar.



(Fig. 4)

Ejemplos:

- Sean las rectas $r \equiv 8x - 6y + 2 = 0$ y $r' \equiv 3x + 4y - 11 = 0$. Las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que determinan son:

$$b_1 \equiv \frac{8x - 6y + 2}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{3x + 4y - 11}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \quad \text{y}$$

$$b_2 \equiv \frac{8x - 6y + 2}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{-3x - 4y + 11}{\sqrt{3^2 + 4^2}}; \quad \text{haciendo operaciones resultan:}$$

$$b_1 \equiv x\left(\frac{8}{10} - \frac{3}{5}\right) + y\left(\frac{-6}{10} - \frac{4}{5}\right) + \frac{2}{10} - \frac{-11}{5} = 0$$

$$b_2 \equiv x\left(\frac{8}{10} + \frac{3}{5}\right) + y\left(\frac{-6}{10} + \frac{4}{5}\right) + \frac{2}{10} - \frac{11}{5} = 0$$

Es decir:

$$b_1 \equiv 2x - 14y + 24 = 0 \quad \text{y} \quad b_2 \equiv 14x + 2y - 20 = 0.$$

Observa que

a) las rectas b_1 y b_2 son perpendiculares por ser

$$\frac{2}{14} \cdot \left(\frac{-14}{2}\right) = -1$$

b) las rectas r y r' se cortan en el punto $\left(\frac{29}{25}, \frac{47}{25}\right)$, que es asimismo el punto de intersección de las rectas b_1 y b_2.

- Considera el triángulo ABC de la figura 5.

La ecuación de la recta BC es $3x + 4y - 12 = 0$.

Las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos determinados por las rectas BC y AB son:

$$h_1 \equiv \frac{3x + 4y - 12}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{x}{\sqrt{1 + 0}} \quad \text{y}$$

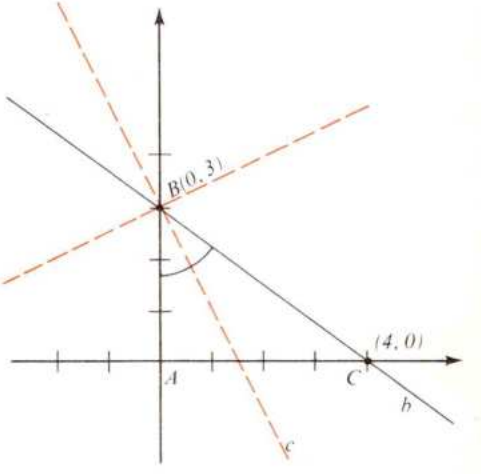
$$h_2 \equiv \frac{3x + 4y - 12}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{-x}{\sqrt{1 + 0}}, \text{ es decir:}$$

$$h_1 \equiv -2x + 4y - 12 = 0 \quad \text{y} \quad h_2 \equiv 8x + 4y - 12 = 0$$

Si h es la bisectriz del ángulo interior del triángulo B, su intersección con la recta AC es un punto del segmento $\overline{AC}$.

El punto de intersección de la recta h_1 con el eje OX es $(-6, 0)$ y el de la recta h_2 con el eje OX es $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

Por tanto, la recta h_2 es la bisectriz del ángulo B: $h_2 \equiv h$.



(Fig. 5)

10. Expresa las rectas b_1 y b_2 del apartado 3. en su forma general y demuestra que son perpendiculares.

11. Determina el lugar geométrico de los puntos equidistantes de las rectas

$$r \equiv 5x + y + 1 = 0 \quad \text{y} \quad r' \equiv x - y + 3 = 0$$

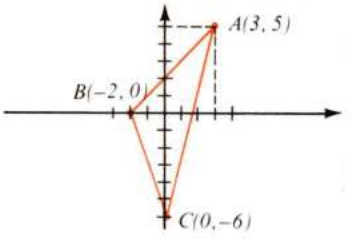
12. Determina el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los ejes de coordenadas.

13. Sea el triángulo de vértices $A\,(3, 5)$, $B\,(-1, 2)$ y $C\,(0, -4)$. Determina el lugar geométrico de los puntos equidistantes de las rectas AB y AC.

14. Sea el triángulo de vértices $A\,(0,0)$, $B\,(0, -5)$ y $C\,(-12, 0)$. Halla la ecuación de las bisectrices de los ángulos internos.

Ejercicios y cuestiones

15. Calcula el punto de intersección de las mediatrices (circuncentro) del triángulo de la figura.

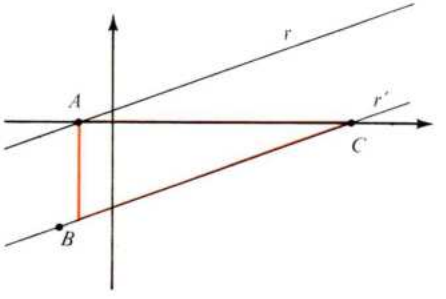


16. Determina el lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas paralelas. Aplícalo al caso de las rectas $r \equiv x + y - 6 = 0$ y $m \equiv x + y - 4 = 0$.

17. Calcula el ángulo que forma la recta $r \equiv 2x + 7y - 6 = 0$ con los ejes de coordenadas.

18. Halla la recta que pasa por el origen y forma con la recta $r \equiv 2x - y + 2 = 0$ un ángulo de 45°.

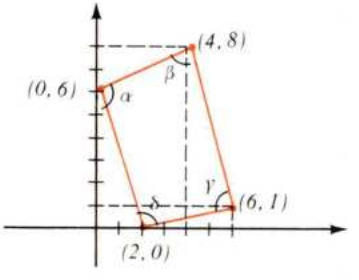
19. Calcula las coordenadas de los vértices del triángulo de la figura sabiendo que r tiene de ecuación $x - 3y + 1 = 0$, que el vértice A tiene de coordenadas $(-1, 0)$, y que la longitud de $\overline{AB}$ es de 6 unidades.



20. Determina un rombo cuyos vértices sean equidistantes de las rectas $7x + y = 0$ y $2x - 6 = 0$.

21. Determina la ecuación de las bisectrices de los ángulos determinados por las rectas $x + y = 0$ y $2x - 3y = 1$.

22. Calcula las bisectrices de los ángulos α, β, γ y δ de la figura.



Tema 9 CIRCUNFERENCIA Y ELIPSE

Dedicamos este tema al estudio de dos lugares geométricos importantes: la circunferencia y la elipse. Estas curvas, al igual que la hipérbola y la parábola, que estudiarás en el siguiente tema, se pueden obtener geométricamente como intersección de un cono con un plano; de ahí que a estas cuatro curvas se les conozca con el nombre de Cónicas.

La importancia de la elipse queda patente si se considera el hecho de que las trayectorias de los electrones en torno al núcleo del átomo y de los planetas alrededor del Sol son elipses.

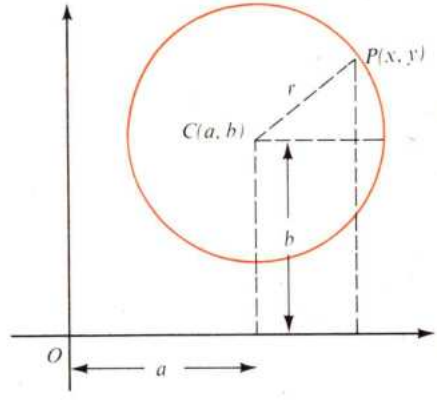
1 Ecuación de la circunferencia

1.1. *La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.*

Si $C(a, b)$ es el centro de una circunferencia de radio r, y $P(x, y)$ un punto cualquiera de la misma (Fig. 1), se tiene:

$$d(C, P) = \overline{CP} = r, \text{ por tanto: } \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad [1]$$



(Fig. 1)

Desarrollando los paréntesis, se obtiene:

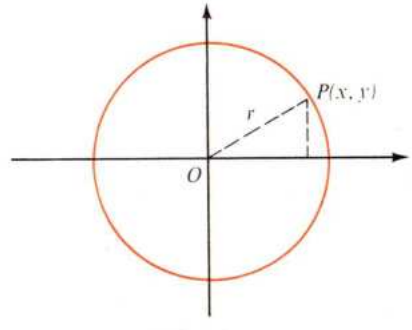
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \quad [2]$$

Si hacemos $D = -2a$, $E = -2b$ y $F = a^2 + b^2 - r^2$ [3]

la ecuación [2] toma la forma

$$\mathbf{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0} \quad [4]$$

En el caso particular de que el centro coincida con el origen de coordenadas, será: $a = 0$, $b = 0$ y la relación [1] se convierte en $\mathbf{x^2 + y^2 = r^2}$ [5], que es la ecuación reducida de la circunferencia (Fig. 2).



(Fig. 2)

Ejemplos:

- La ecuación de la circunferencia de radio $r = 2$ y centro el punto $(3, 4)$ es $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$.

  Desarrollando los cuadrados, resulta:

  $$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$$

- Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, podemos hallar su centro y su radio aplicando las fórmulas [3].

$-2 = -2a \Rightarrow a = 1$ Centro $(1, -2)$

$4 = -2b \Rightarrow b = -2$

Como $F = a^2 + b^2 - r^2$, resulta: $-4 = 1 + 4 - r^2 \Rightarrow r^2 = 9$; $r = 3$.

- La ecuación de la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio $r = 2$ es: $x^2 + y^2 = 4$.

1.2. Podemos preguntarnos si toda ecuación de la forma [4] $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una circunferencia.

Comparando esta ecuación con la [2] resultan las relaciones [3], de donde $a = -\frac{D}{2}$; $b = -\frac{E}{2}$; $r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$

Como el valor de r viene dado por una raíz cuadrada, la existencia de un valor real para r dependerá del signo de

$$D^2 + E^2 - 4F$$

Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, entonces el valor de r es real y la curva que representa la ecuación [3] es una circunferencia.

Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, entonces $r = 0$, y se trata de una circunferencia de radio nulo, es decir, un punto.

Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, entonces el valor de r no es un número real y no existe circunferencia.

Ejemplo:

- Dada la ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 29 = 0$, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} -2a = -4 \\ -2b = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 5 \end{array}\right. \quad \text{Centro } (2, 5)$$

$$r = \sqrt{\frac{16 + 100 - 116}{4}} = \sqrt{0} = 0$$

luego se trata de una circunferencia de radio nulo, es decir, del punto $(2, 5)$.

1.3. Si en la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ es $D = 0$, entonces $a = -\frac{D}{2} = 0$, es decir, el centro es un punto situado en el eje de ordenadas.

Si $E = 0$, entonces $b = -\frac{E}{2} = 0$, y el centro se encuentra en el eje de abscisas.

Ejercicios:

1. Halla las ecuaciones de las circunferencias cuyos centros y radios se indican, expresándolas en las formas [1] y [4]

a) centro $(1, 4)$, radio 5

b) centro $(3, -5)$, radio 2

c) centro $(0, 3)$, radio 4

d) centro $(3, 0)$, radio 4

2. Halla el centro y el radio de las circunferencias cuyas ecuaciones son:

a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$

Si $F = 0$, el punto (0, 0) verifica la ecuación de la circunferencia; luego la circunferencia pasa por el origen de coordenadas.

Finalmente, si $D = 0$ y $E = 0$, la ecuación es de la forma $x^2 + y^2 + F = 0$, y su centro es el origen de coordenadas.

1.4. Veamos cuál es la condición necesaria y suficiente para que una ecuación de segundo grado, con dos variables, x e y:

$$\mathbf{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} \quad [5]$$

represente una circunferencia.

Como la ecuación de una circunferencia es de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, resulta que si [5] es la ecuación de una circunferencia se ha de verificar:

a) $A = C \neq 0$

b) $B = 0$, es decir, debe carecer de término en xy

c) $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.

En estas condiciones la ecuación [5] se puede escribir

$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$, que es una ecuación del mismo tipo que la [3].

Ejemplos:

- La ecuación $4x^2 - 4y^2 - 4x - 8y - 11 = 0$ representa una circunferencia, ya que se verifican las condiciones anteriores:

  a) $4 = 4 \neq 0$

  b) No tiene término en xy

  c) $4^2 + 4^2 - 4 \cdot 4(-11) > 0$

  Para hallar el centro y el radio de dicha circunferencia dividimos en primer lugar por 4, con lo que obtenemos

  $$x^2 + y^2 - x - 2y - \frac{11}{4} = 0$$

  En esta ecuación se calcula el centro y el radio en la forma indicada en **1.1.**

  $$\begin{aligned} -2a = -1 &\Rightarrow a = \frac{1}{2} \\ -2b = -2 &\Rightarrow b = 1 \end{aligned} \qquad \text{Centro} \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

  Como $F = a^2 + b^2 - r^2$, resulta:

  $$-\frac{11}{4} = \frac{1}{4} + 1 - r^2 \Rightarrow r^2 = 4; \quad r = 2$$

3. De las circunferencias del ejercicio **2.**, indica las que tienen su centro en los ejes y las que pasan por el origen de coordenadas.

4. Halla el centro y el radio de la circunferencia de ecuación $9x^2 + 9y^2 - 6x + 18y - 125 = 0$.

(Indicación: en primer lugar, divide por 9)

2 Determinación de la circunferencia

La ecuación de una circunferencia en la forma [1] tiene tres constantes, a, b y r; análogamente ocurre en la forma [4]; las constantes, en este caso, son D, E y F; por consiguiente, son tres las condiciones que necesitamos conocer para determinar la ecuación de una circunferencia.

Ejemplos:

- Vamos a hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2, 0)$, $B(2, 3)$, $C(1, 3)$.

Primer método

Sustituyendo x e y en la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ por las coordenadas de los puntos dados se obtiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4 + 0 + 2D + 0 + F = 0 \\ 4 + 9 + 2D + 3E + F = 0 \\ 1 + 9 + D + 3E + F = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2D + F = -4 \\ 2D + 3E + F = -13 \\ D + 3E + F = -10 \end{array}\right.$$

Resolviendo el sistema se obtiene $D = -3$; $E = -3$; $F = 2$,

luego la ecuación de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$$

Segundo método

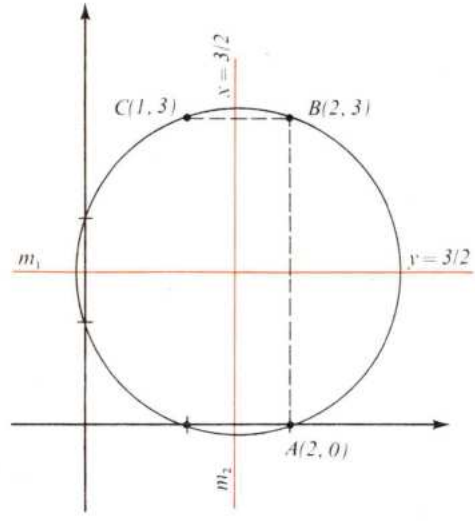
Como el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo es el punto de intersección de las mediatrices, basta hallar las ecuaciones de dos de estas mediatrices y resolver el sistema formado por ellas. En este caso, las ecuaciones de las mediatrices m_1 (mediatriz de $\overline{AB}$) y m_2 (mediatriz de $\overline{BC}$) se obtienen fácilmente por ser paralelas a los ejes, como se ve en la figura 3.

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \longrightarrow y = \dfrac{3}{2} \\ m_2 \longrightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\} \text{ luego el centro es } \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

El radio será la distancia del punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ a cualquiera de los puntos A, B o C.

$$r = \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}}$$

por tanto, la ecuación será $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$



(Fig. 3)

5. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (0, 1), (5, 1) y (2, −3).

6. Halla la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $A(0, -2)$, $B(4, 2)$, $C(-2, 4)$.

7. Halla la ecuación en la circunferencia que tiene su centro en la recta $y = x - 1$ y pasa por los puntos $A(4, 0)$ y $B(0, 6)$.

8. La recta $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$ forma un triángulo con los ejes de coordenadas. Halla la ecuación de la circunferencia circunscrita.

• Supongamos que se trata de hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en la recta de ecuación $x + 2y + 7 = 0$ y que pasa por los puntos $A(0, 2)$ y $B(2, 1)$. La ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ es

$(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$ (ver tema 8), es decir, $4x - 2y - 1 = 0$

Resolviento el sistema $\begin{cases} 4x - 2y - 1 = 0 \\ -x + 2y + 7 = 0 \end{cases}$ se obtiene el centro C de la circunferencia, puesto que ambas rectas pasan por C; así, resulta $C\left(-2, -\frac{9}{2}\right)$

El radio de la circunferencia se obtiene calculando la distancia de C a cualquiera de los puntos dados

$$r = \sqrt{(0 + 2)^2 + \left(2 + \frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{169}{4}} = \sqrt{\frac{185}{4}}$$

luego la ecuación de la circunferencia es

$$(x + 2)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{185}{4}$$

• Tratemos de encontrar la ecuación de la circunferencia que tiene por tangente la recta $s = 3x + 4y - 2 = 0$, sabiendo que su centro es el punto $A(2, 4)$.

El radio de dicha circunferencia será la distancia del punto A a la recta s.

$$d(A, s) = r = \left| \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 - 2}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \frac{20}{5} = 4$$

luego la ecuación buscada es $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$.

9. Halla la ecuación de una circunferencia sabiendo que uno de sus diámetros es el segmento $\overline{AB}$, $A(0, -3)$, $B(2, 0)$.

10. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto $(3, 0)$, sabiendo que la recta $5x + 12y - 6 = 0$ es tangente.

11. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas, por el punto $A(12, 5)$ y es tangente a la recta $x + y = 0$.

3 Reducción de la ecuación de una circunferencia

Sea la circunferencia $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Si trasladamos los ejes al punto (a, b), resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x = x' + a \\ y = y' + b \end{array}\right\}$$ y la ecuación se convierte en

$(x' + a - a)^2 + (y' + b - b)^2 = r^2$, es decir, $x'^2 + y'^2 = r^2$

Se ve que si trasladamos los ejes al centro de una circunferencia su ecuación toma la forma $x^2 + y^2 = r^2$.

4 Intersección con una recta

Si tratamos de encontrar los puntos de intersección de una circunferencia y una recta resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de ambas líneas; también podemos hacer una traslación de ejes y trabajar con una ecuación de la forma reducida $x^2 + y^2 = r^2$.

Ejemplo:

- Vamos a hallar los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 33 = 0$ con la recta $x - 2y + 12 = 0$.

  Para ello resolvemos el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 14y + 33 = 0 \\ x - 2y + 12 = 0 \end{cases}$

  $x = 2y - 12$; $(2y - 12)^2 + y^2 + 6(2y - 12) - 14y + 33 = 0$

  Haciendo las operaciones indicadas y simplificando resulta $y^2 - 10y + 21 = 0$, luego los puntos de intersección tienen por ordenadas $y_1 = 7$ e $y_2 = 3$; llevando estos valores a la ecuación $x = 2y - 12$ se obtienen los puntos de intersección, que son $(2, 7)$, $(-6, 3)$.

  Nota. Al resolver el sistema formado por las ecuaciones de la circunferencia y de la recta se obtiene una ecuación de 2.º grado; esta ecuación puede tener:

  Dos soluciones reales; entonces la recta es secante a la circunferencia.

  Una solución real; en este caso la recta es tangente a la circunferencia.

  Ninguna solución real; entonces la recta es exterior a la circunferencia.

12. Halla los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$ y la recta $x + 2y - 5 = 0$.

5 Potencia de un punto

5.1. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ [1] y la recta $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{v}$ [2] donde $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es unitario $|\vec{v}| = 1$, sabemos que los puntos de intersección A, B de la recta y la circunferencia se obtienen resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

Escribiendo la ecuación [2] en forma paramétrica:

$\begin{cases} x = x_1 + \lambda v_1 \\ y = y_1 + \lambda v_2 \end{cases}$ [3], y sustituyendo en [1], resulta:

$$(x_1 + \lambda v_1)^2 + (y_1 + \lambda v_2)^2 = r^2, \text{ o sea,}$$
$$\lambda^2 (v_1^2 + v_2^2) + 2\lambda (v_1 x_1 + v_2 y_1) + x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0$$

Por ser $\vec{v}$ unitario, $v_1^2 + v_2^2 = 1$, se tiene:

$$\lambda^2 + 2\lambda (v_1 x_1 + v_2 y_1) + x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0 \text{ [4]}$$

Si sustituimos en [3] las soluciones λ_1, λ_2 de la ecuación anterior, se obtienen los puntos comunes A y B (Fig. 4), es decir,

$$A\,(x_1 + \lambda_1 v_1, y_1 + \lambda_1 v_2),\ B\,(x_1 + \lambda_2 v_1, y_1 + \lambda_2 v_2)$$

La distancia de P a A es $d(P, A) = \overline{PA} = \sqrt{\lambda_1^2 (v_1^2 + v_1^2)} = \lambda_1$

Análogamente, $d(P, B) = \overline{PB} = \sqrt{\lambda_2^2 (v_1^2 + v_2^2)} = \lambda_2$ (Fig. 4).

Por tanto, λ_1 y λ_2 son las distancias de P a A y B, respectivamente.

Como λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación [4], su producto será $\lambda_1 \lambda_2 = x_1^2 + x_2^2 - r^2$, que, como se ve, sólo depende de las coordenadas del punto P y del radio de la circunferencia y no de la recta trazada por P; de aquí se deduce que: cualquiera que sea la secante trazada por P se verifica:

$$\overline{\mathbf{PA}} \cdot \overline{\mathbf{PB}} = \overline{\mathbf{PA'}} \cdot \overline{\mathbf{PB'}} = \overline{\mathbf{PA''}} \cdot \overline{\mathbf{PB''}} = \textbf{Constante}$$ (Fig. 5);

esta constante se llama *potencia del punto P respecto de la circunferencia.*

Nota: Si la circunferencia no tiene su centro en el origen de coordenadas, se puede reducir su ecuación mediante una traslación de ejes; como las distancias son invariantes en las traslaciones obtendríamos el mismo resultado anterior.

5.2. Consideremos la secante que pasa por el centro de la circunferencia del centro (a, b) (Fig. 6).

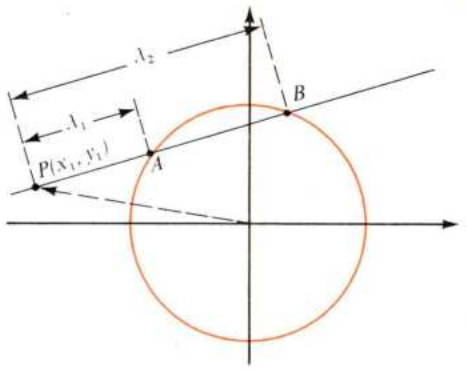
La potencia del punto $P(x_1, y_1)$ será:

$$\text{Pot}\,(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = (d - r) \cdot (d + r) = d^2 - r^2$$

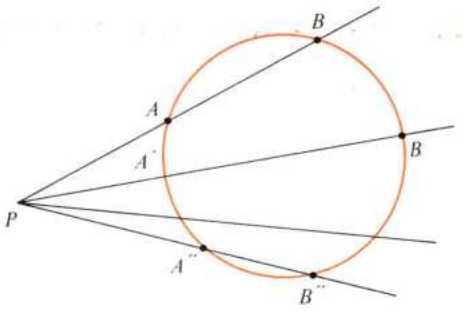
pero como $d = \overline{PO} = \sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2}$, resulta que

$$\mathbf{Pot\,(P) = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2}$$

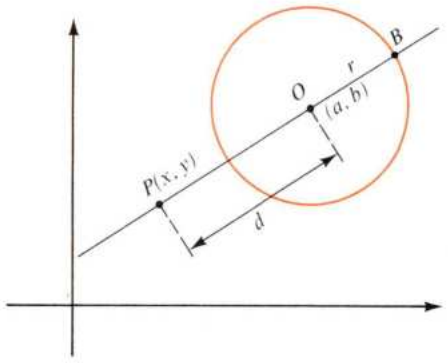
Esta igualdad expresa que la potencia de un punto $P(x_1, y_1)$ respecto de una circunferencia $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$ se obtiene sustituyendo en su ecuación las coordenadas generales (x, y) por las particulares (x_1, y_1) del punto dado.



(Fig. 4)



(Fig. 5)



(Fig. 6)

13. Si $d^2 - r^2 > 0$ es $d > r$ y el punto P es exterior a la circunferencia, ¿qué posición ocupa el punto P respecto de la circunferencia si su potencia es negativa, es decir, si $d^2 - r^2 < 0$?

14. ¿Qué posición ocupa el punto P respecto de la circunferencia si $d^2 - r^2 = 0$?

Ejemplos:

- La potencia del punto $P(2, 3)$ respecto de la circunferencia $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ es:

$$\text{Pot}\,(P)=(2-1)^2+(3+1)^2-2$$
$$\text{Pot}\,(P)=1+16-2=15$$

- La potencia del punto $A(-1, 2)$ respecto de la circunferencia $x^2+y^2+6x-14y+33=0$ es

$$\text{Pot}\,(A)=(-1)^2+2^2+6(-1)-14\cdot 2+33=$$
$$=1+4-6-28+33=4$$

15. ¿Cuál es la potencia del centro de la circunferencia $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ respecto de ella?

16. Halla la potencia del origen de coordenadas respecto de la circunferencia

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

¿Qué relación hay entre dicha potencia y el término independiente de la ecuación de la circunferencia?

6 Eje radical y centro radical

6.1. *Se llama eje radical de dos circunferencias al lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de ambos.*

Sean C_1 y C_2 las dos circunferencias dadas:

$C_1)\ x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$

$C_2)\ x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera del eje radical, se tendrá

$$\text{Pot}\,(P)=x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2$$

Simplificando:

$$\mathbf{(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+F_1-F_2=0,}$$

que es la ecuación del eje radical e.

Veamos que el eje radical es una recta perpendicular a la línea que une los centros.

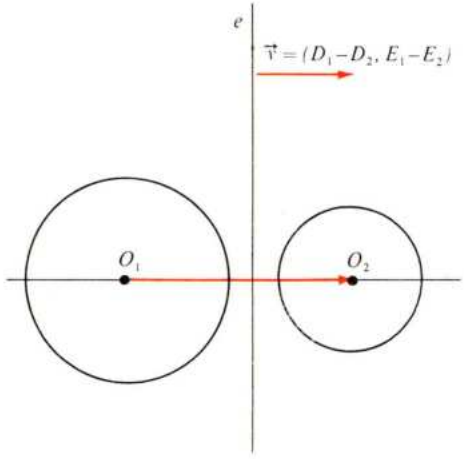
Sean $O_1(a_1, b_1)$ y $O_2(a_2, b_2)$ los centros de las circunferencias C_1 y C_2, respectivamente (Fig. 7).

Será: $a_1=-\dfrac{D_1}{2}$, $a_2=-\dfrac{D_2}{2}$

$$b_1=-\frac{E_1}{2},\ b_2=-\frac{E_2}{2}$$

El vector de dirección de la recta O_1O_2 es

$$\overrightarrow{O_1O_2}=\left(-\frac{D_2}{2}+\frac{D_1}{2},-\frac{E_2}{2}+\frac{E_1}{2}\right)$$



(Fig. 7)

El vector perpendicular asociado al eje radical e es

$$\vec{v} = (D_1 - D_2, E_1 - E_2)$$

Como $\vec{v} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$ resulta que $\vec{v}$ y $\overrightarrow{O_1O_2}$ tienen la misma dirección, o, lo que es lo mismo, el eje e y la recta O_1O_2 son perpendiculares (Fig. 7).

Ejemplos:

- Para hallar el eje radical de las circunferencias

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 10y + 29 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0 \end{cases}$$

restamos ambas ecuaciones, y resulta:

$$2x - 2y + 8 = 0; \quad x - y + 4 = 0$$

- Para hallar el eje radical de las circunferencias

$C_1: 2x^2 + 2y^2 - 5 = 0$ y $C_2: x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$

dividimos en primer lugar la ecuación C_1 por 2 y a continuación las restamos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{5}{2} = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0 \end{cases}$$

$$8x + \frac{13}{2} = 0 \quad \text{o bien} \quad x = -\frac{13}{16}$$

6.2. *Centro radical de tres circunferencias*

Consideremos tres circunferencias, C_1, C_2, C_3 de ecuaciones

$C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$

$C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$

$C_3: x^2 + y^2 + D_3x + E_3y + F_3 = 0$

Restando las ecuaciones de estas circunferencias dos a dos obtenemos tres ejes radicales cuyas ecuaciones son:

de C_1 y C_2: $(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + F_1 - F_2 = 0$ [1]

de C_1 y C_3: $(D_1 - D_3)x + (E_1 - E_3)y + F_1 - F_3 = 0$ [2]

de C_2 y C_3: $(D_2 - D_3)x + (E_2 - E_3)y + F_2 - F_3 = 0$ [3]

Vamos a demostrar que si los dos primeros se cortan en un punto $P(x_1, y_1)$, entonces el tercero también pasa por dicho punto.

En efecto, si P pertenece a los ejes radicales [1] y [2], será:

$(D_1 - D_2)x_1 + (E_1 - E_2)y_1 + F_1 - F_2 = 0$ [4]

$(D_1 - D_3)x_1 + (E_1 - E_3)y_1 + F_1 - F_3 = 0$ [5]

17. Halla el eje radical de las circunferencias

$x^2 + y^2 + 3x - 2y - 3 = 0$

$x^2 + y^2 + x - y - 6 = 0$

18. Halla el eje radical de las circunferencias

$3x^2 + 3y^2 - 2x + 3y = 0$

$x^2 + y^2 = 4$

19. Halla el eje radical de las circunferencias C_2 y C_3 del ejemplo del apartado **6.2.** y comprueba que pasa por el centro radical de C_1, C_2 y C_3.

Restando de la igualdad [5] la [4] se obtiene:

$$(D_2 - D_3)x_1 + (E_2 - E_3)y_1 + F_2 - F_3 = 0$$

y esta última igualdad nos dice que el punto $P(x_1, y_1)$ satisface también la ecuación [3].

Este punto de intersección de los ejes radicales de las tres circunferencias se llama *centro radical.*

Ejemplo:

- Hallemos el centro radical de las circunferencias

$C_1: x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

$C_2: x^2 + y^2 + 3x + 5y - 1 = 0$

$C_3: x^2 + y^2 - \frac{3}{2} = 0$

El eje radical de C_1 y C_2 es $5x + y - 1 = 0$

El eje radical de C_1 y C_3 es $-2x + 4y + \frac{3}{2} = 0$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos ejes resulta: $x = \frac{1}{4}$, $y = -\frac{1}{4}$; luego el centro radical es

$$\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

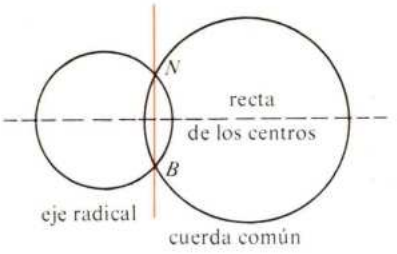
6.3. *Construcción gráfica del eje radical*

Si las circunferencias son secantes (Fig. 8), el eje radical es la recta determinada por la cuerda común, ya que en este caso los puntos A y B de intersección tienen potencia 0 respecto de ambas circunferencias.

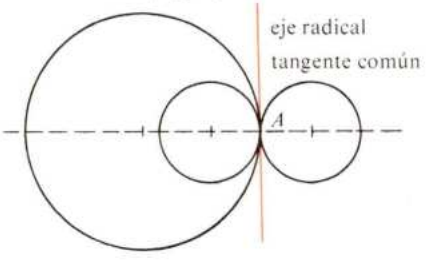
Como el eje radical de dos circunferencias es perpendicular a la línea de los centros, resulta que:

a) Si las circunferencias son tangentes (Fig. 9), el eje radical es la tangente común, puesto que el punto de contacto A tiene potencia cero respecto de ambas circunferencias.

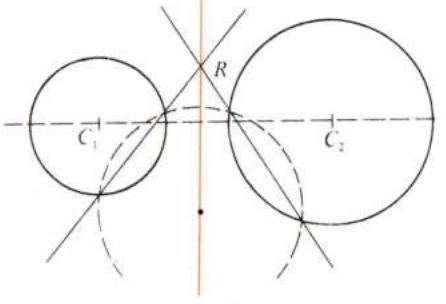
b) Si las circunferencias no tienen puntos comunes (Figs. 10 y 11), para trazar el eje radical de las circunferencias C_1 y C_2 trazamos una circunferencia auxiliar C que corte a ambas; a continuación se determina el centro radical R de C_1, C_2 y C. Finalmente, se traza desde R la perpendicular a la línea de los centros C_1 y C_2.



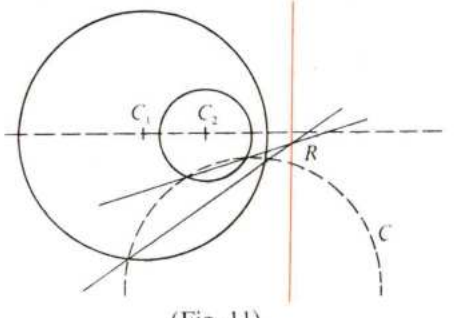
(Fig. 8)



(Fig. 9)



(Fig. 10)



(Fig. 11)

20. Halla el centro radical de las circunferencias

$C_1: x^2 + y^2 - 4y = 0$

$C_2: (x - 3)^2 + (y + 4)^2 - 1 = 0$

$C_3: x^2 + y^2 - 4 = 0$

7 Elipse y sus elementos

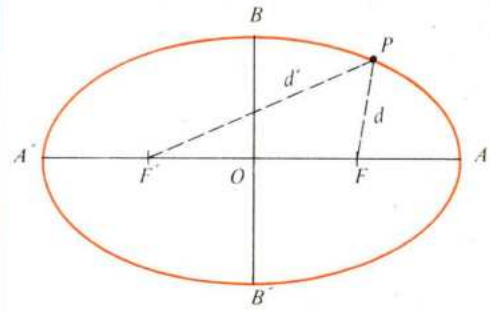
7.1. *Se llama elipse al lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.*

Designemos por F y F' los *focos*. La distancia de F a F' se llama *distancia focal*, y se suele designar por $2c$.

Los segmentos $\overline{PF} = d$ y $\overline{PF'} = d'$ se llaman *radios vectores* del punto P (Fig. 12), y su suma se designa por $2a$; $d + d' = 2a$.

El punto medio O del segmento $\overline{FF'}$ se llama *centro* de la elipse, y es su centro de simetría.

La recta FF' se llama *eje focal* y la mediatriz del segmento $\overline{FF'}$ es el *eje secundario*. Los puntos A, A', B, B', en que la curva corta a los ejes, se llaman vértices.



(Fig. 12)

7.2. El segmento $\overline{AA'}$ se llama *eje mayor* de la elipse, y teniendo en cuenta que la elipse es una curva simétrica respecto de sus ejes y del centro, se puede probar que $\overline{AA'} = 2a$.

En efecto: por ser A un punto de la elipse, se tiene:

$$\overline{AF'} + \overline{AF} = 2a \text{ [1]}$$

Por otra parte, como $A'F' = AF$, sustituyendo en [1] resulta:

$$\overline{AF'} + \overline{F'A'} = 2a, \text{ es decir, } \overline{AA'} = 2a \text{ (Fig. 13)}$$

El segmento $\overline{BB'}$ se llama *eje menor* de la elipse; su longitud se representa por $2b$.

Si P es un punto de la elipse, por definición se verifica:

$\overline{PF'} + \overline{PF} = 2a$; por otra parte, en el triángulo PFF' se tiene:

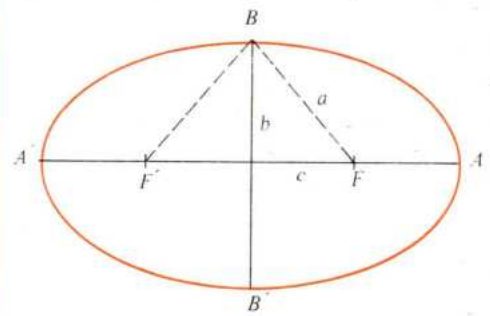
$\overline{PF'} + \overline{PF} > \overline{FF'}$; luego $2a > 2c$, esto es, $a > c$.

Se puede probar fácilmente que $\overline{BF} = \overline{BF'} = a$.

En efecto: por ser B un punto de la elipse (Fig. 13), se tiene:

$$\overline{BF'} + \overline{BF} = 2a$$

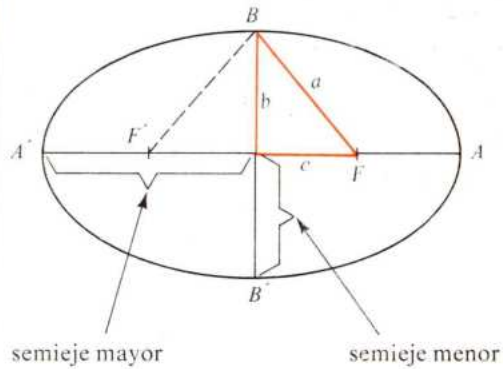
Como B es un punto de la mediatriz del segmento $\overline{F'F}$, equidista de F y F', $\overline{BF'} = \overline{BF}$; en consecuencia, $\overline{BF} + \overline{BF} = 2a$ y $\overline{BF} = a$.



(Fig. 13)

Los segmentos a, b y c (Fig. 14) forman un triángulo rectángulo y se verifica $a^2 = b^2 + c^2$.

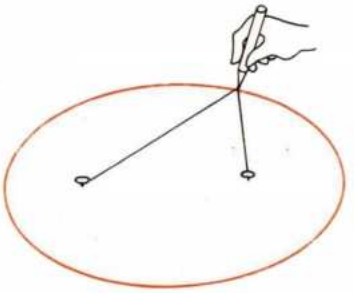
El cociente $\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} = \dfrac{\sqrt{\mathbf{a^2 - b^2}}}{\mathbf{a}}$ se llama *excentricidad* de la elipse, y por ser $c < a$, e es un número comprendido entre 0 y 1.



(Fig. 14)

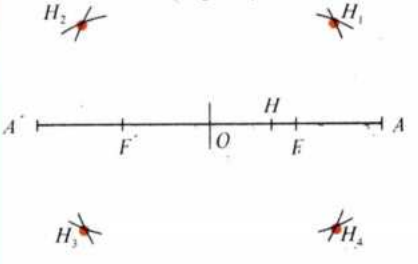
7.3. *Trazado de la elipse*

Puedes dibujar una elipse fijando un hilo a los extremos de dos alfileres, como indica la figura 15, manteniendo el hilo tenso con un lápiz mediante un trazo continuo. Este modo de proceder se llama el *método del jardinero.*



(Fig. 15)

Conociendo los focos $\overline{FF'} = 2c$ y el eje mayor $\overline{AA'} = 2a$, es fácil obtener tantos puntos de la elipse como se deseen. Para ello consideremos un punto H situado en el segmento $\overline{OF}$ (Fig. 16); haciendo centro en F y F', sucesivamente, se trazan dos arcos de radio AH. Después, con radio $A'H$ y centros en F' y en F se trazan otros dos arcos, que cortan a los primeros en cuatro puntos, H_1, H_2, H_3, H_4, que pertenecen a la elipse.



(Fig. 16)

En efecto:
para el punto H_1 se tiene $\overline{H_1F} + \overline{H_1F'} = \overline{AH} + \overline{HA'} = 2a$.
Tomando un punto del segmento $\overline{OF}$ distinto de H, se obtienen otros cuatro puntos de la elipse; y así tantos puntos como se desee.

8 Ecuación de la elipse

8.1. Vamos a obtener la ecuación de la elipse para el caso en que adoptemos como eje de abscisas el eje focal FF' y como eje de ordenadas la mediatriz del segmento $\overline{FF'}$ (Fig. 17). Como $\overline{FF'} = 2c$, las coordenadas de los focos son $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$.

Sea ahora $P(x, y)$ un punto cualquiera de la elipse; por definición es: $\overline{PF'} + \overline{PF} = 2a$. Analíticamente, esta relación se escribe:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Elevando al cuadrado en $\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$ resulta una ecuación equivalente, ya que los dos miembros de la anterior son positivos; esta ecuación es:

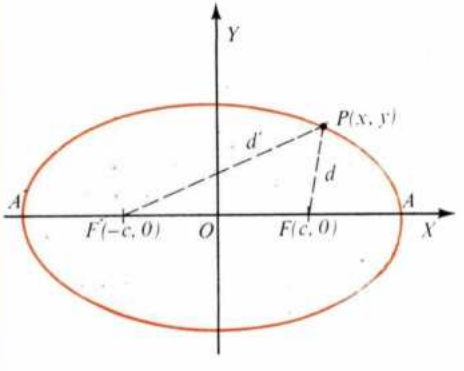
$$x^2 + c^2 + 2xc + y^2 = 4a^2 + x^2 + c^2 - 2xc + y^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

Elevando de nuevo al cuadrado y simplificando se llega a la expresión: $x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$; o, lo que es lo mismo, $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ [1], donde se ha puesto $b^2 = a^2 - c^2$. Finalmente, dividiendo por $a^2b^2 \neq 0$ resulta:

$$\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2} + \frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2} = \mathbf{1} \quad [2]$$

que es la ecuación de la elipse referida a sus ejes o *ecuación reducida.*



(Fig. 17)

Ejemplos:

- En una elipse cuya posición relativa respecto a los ejes es la misma que la de la figura 17 se conoce:

  la distancia focal $= \overline{FF'} = 2c = 6$

  el eje mayor $= \overline{AA'} = 2a = 10$

  Para encontrar su ecuación calculamos b

  $$c = 3, \quad a = 5, \quad a^2 = b^2; \quad b = \sqrt{25 - 9} = 4$$

  Sustituyendo los valores de a y b en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, resulta $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

  Su excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$

- Sea la elipse de ecuación $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

  Entonces $a^2 = 100$; $b^2 = 36$; $a = 10$, $b = 6$. A partir de los semiejes a y b podemos calcular la semidistancia focal c; $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$.

8.2. Las simetrías respecto de los ejes y el centro, así como otras propiedades, se pueden obtener a partir de las ecuaciones [1] o [2].

Sea $P(x, y)$ un punto de la elipse. Los puntos

$P'(-x, y)$, simétrico de P respecto del eje OY;

$P''(x, -y)$, simétrico de P respecto del eje OX;

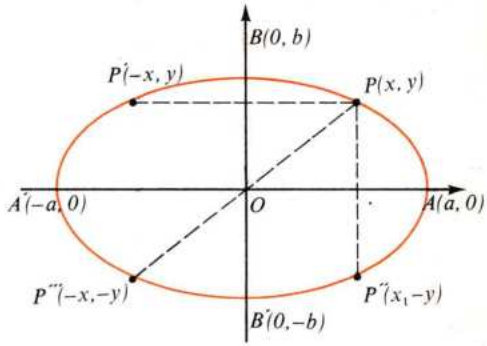
$P'''(-x, -y)$, simétrico de P respecto del origen O,

pertenecen también a la elipse (Fig. 18), lo que prueba que la elipse es simétrica respecto de los ejes y del origen.

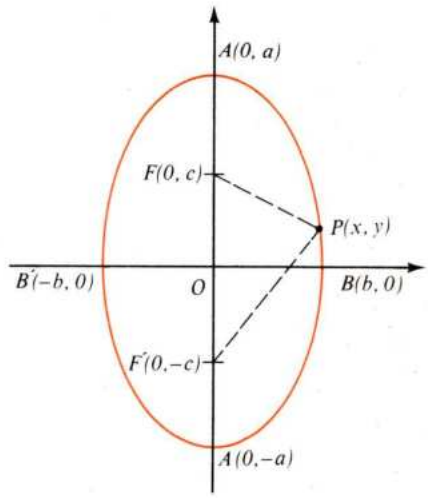
Si hacemos $y = 0$ en [1] o en [2], resulta: $x^2 = a^2$; $x = \pm a$, lo que significa que la elipse corta el eje x en los puntos de abscisas $+a$ y $-a$. Estos puntos $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ son los vértices de la elipse que determinan el *eje mayor* AA' cuya longitud es $2a$.

Haciendo $x = 0$ en [1] o en [2] resulta: $y^2 = b^2$; $y = \pm b$, lo que indica que la elipse corta al eje y en los puntos $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$ que son otros dos vértices de la elipse que determinan el *eje menor* $\overline{BB'} = 2b$.

8.3. En la figura 19 aparece una elipse cuyo centro coincide con el origen de coordenadas y su eje mayor está sobre el eje de ordenadas.



(Fig. 18)



(Fig. 19)

21. Como $a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - xc$, resulta que $\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a - x\frac{c}{a} = a - xe$, es decir, para el radio vector $PF = d$ (Fig. 17) se tiene: $d = a - xe$.

Prueba, de manera análoga, que $d' = a + xe$

22. Halla la ecuación de una elipse cuya posición relativa a los ejes es la misma de la figura 17, sabiendo que $AA' = 26$ cm y $FF' = 10$.

23. Calcula los semiejes y las coordenadas de los focos y la excentricidad de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

En este caso, las coordenadas de los focos y de los vértices son: $F(0, c)$, $F'(0, -c)$, $A(0, a)$, $A'(0, -a)$, $B(b, 0)$, $B'(-b, 0)$.

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la elipse, $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} + \sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a$$

Procediendo como en **8.1.**, se llega a la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad [3]$$

8.4. Consideremos una elipse de centro el punto (h, k) cuyo eje mayor es paralelo al eje OX (Fig. 20).

Las coordenadas de los focos y de los vértices, en este caso, $F(h + c, k)$, $F'(h - c, k)$, $A(h + c, k)$, $A'(h - a, k)$, $B(h, k + b)$, $B'(h, k - b)$.

Si trasladamos los ejes al punto (h, k), la ecuación de la elipse, referida a los nuevos ejes OX', OY', es:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad [4]$$

Como entre las coordenadas (x, y) y (x', y') de cualquier punto existe la relación $\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$ sustituyendo en [4], resulta

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad [5]$$

Ejemplo:

- Hallemos las coordenadas de los focos y la ecuación de una elipse de centro el punto (2, 1), sabiendo que su distancia focal es $2E = 16$ y su eje mayor, $2a = 20$, es horizontal.

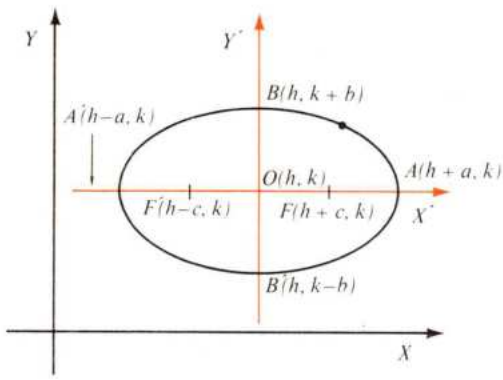
  Como $c = 8$, resulta que los focos son $(2 - 8, 1) = (-6, 1)$ y $(2 + 8, 1) = (10, 1)$.

  Por otra parte, $b^2 = 100 - 64 = 36$.

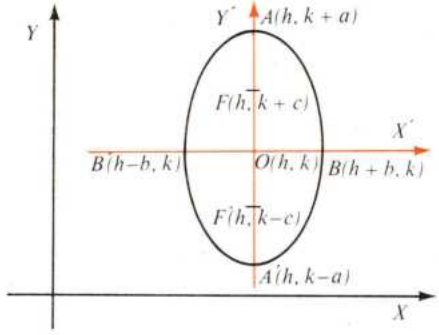
  Luego la ecuación de la elipse es: $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{36} = 1$

8.5. En el caso de que la elipse tenga su centro en el punto (h, k) y su eje mayor sea paralelo al eje OY (Fig. 21), las coordenadas de los focos y de los vértices son $F(h, k + c)$, $F'(h, k + c)$, $A(h, k + a)$, $A'(h, k - a)$, $B(h + b, k)$, $B'(h - b, k)$, y procediendo de modo análogo a como se hizo en **8.4.**, resulta la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad [6]$$



(Fig. 20)



(Fig. 21)

24. Sustituyendo en la ecuación las coordenadas comprueba que el punto $P\left(3, \frac{16}{5}\right)$ pertenece a la elipse de ecuación $16x^2 + 25y^2 = 400$.

Comprueba del mismo modo que los puntos

$P'\left(-3, \frac{16}{5}\right)$ $P''\left(3, -\frac{16}{5}\right)$ y $P'''\left(-3, -\frac{16}{5}\right)$

pertenecen también a dicha elipse.

25. Halla la ecuación de una elipse cuya posición relativa a los ejes es la de la figura 19, sabiendo que la distancia focal es 16 cm y el eje mayor 34 cm. Calcula también la excentricidad.

26. Halla las coordenadas de los focos de los vértices y la ecuación de la elipse cuyo centro es el punto (2, 5), si $2a = 52$ y $2c = 20$.

Ejemplo:

- Si el eje mayor de una elipse $2a = 40$ es paralelo al eje OY, el eje menor $2b = 24$ y su centro es el punto $(4 - 2)$, entonces tiene por ecuación $\frac{(x-4)}{12^2} + \frac{(y+2)^2}{20^2} = 1$

Nota: Al quitar denominadores y desarrollar las ecuaciones [5] y [6] se obtiene, en general, una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ [7], en donde A y C tienen el mismo signo.

Recíprocamente, dada una ecuación de la forma [7], se puede pasar, en general, a una de las formas [5] o [6] completando cuadrados; esta reducción es imposible cuando se llega a una expresión en la que el primer miembro es una suma de cuadrados y el segundo miembro es un número negativo o nulo.

Ejemplo:

- Consideremos la ecuación $4x^2 + 25y^2 - 16x + 200y + 316 = 0 \Rightarrow 4(x^2-4x) + 25(y^2 + 8y) = -316 \Rightarrow 4(x^2-4x + 4) + 25(y^2 + 8y + 16) = 16 + 400 - 316 \Rightarrow 4(x-2)^2 + 25(y+4)^2 = 100 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{25^2} + \frac{[y-(-4)]}{2^2} = 1$, que es la ecuación de una elipse en la forma [5].

27. Escribe en una de las formas [4] o [5] la ecuación de la elipse

$$8x^2 + 9y^2 - 48x - 72y - 936 = 0$$

28. Haz lo mismo en la ecuación

$$9x^2 + 5y^2 + 54x - 40y - 19 = 0$$

Ejercicios y cuestiones

29. De las siguientes ecuaciones, indica las que son circunferencias.

a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $2x^2 + 2y^2 + 6x - 10y + 2 = 0$

c) $x^2 + 2y^2 - 3x + 5y + 2 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$

30. Sabiendo que la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey = 0$ pasa por los puntos (2, 0) y (0, 3), calcula D y E. Calcula también la potencia del punto (2, 5) respecto de dicha circunferencia.

31. Halla la potencia del punto $(2, -1)$ respecto de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y determina los puntos de intersección con la recta $y = -x + 7$.

32. Halla la ecuación de una elipse cuya excentricidad es $e = 2/3$, sabiendo que $a = 9$.

33. Halla los puntos de intersección de la elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$ con la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$.

34. Halla las ecuaciones en la forma reducida de las siguientes elipses:

a) eje mayor 10, distancia focos 6,

b) eje menor 10, distancia entre focos 24,

c) excentricidad 3/5, distancia entre focos 12.

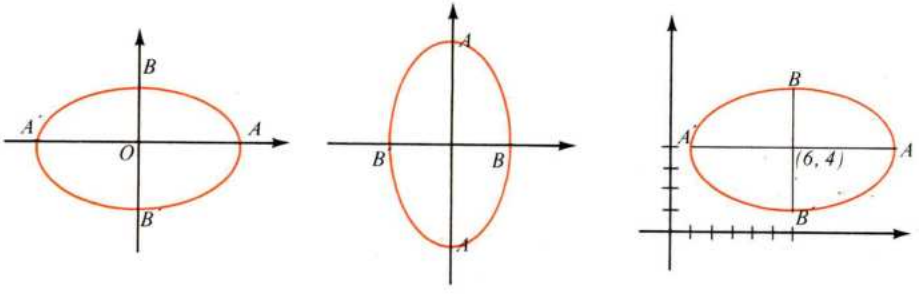
35. Halla la ecuación de la elipse que pasa por $(-5, 0)$, $\left(2, \frac{12}{5}\sqrt{21}\right)$ y cuyos ejes son a los ejes coordenados.

36. Halla los puntos de intersección de la recta $y = x - 1$ con la elipse $x^2 + 4y^2 = 8$.

37. Demuestra que la elipse $\frac{x^2}{2/3} + y^2 = 1$ y la recta $y = -x + 5$ no tienen ningún punto común.
(Indicación: Basta con probar que el discriminante de la ecuación de 2.º grado que resulta de resolver el sistema es negativo)

38. Halla el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancia $F'(-4, 0)$ y $F(4, 0)$ es 10.

39. Halla la ecuación de las elipses representadas en las siguientes figuras, sabiendo que $\overline{AA'} = 10$ y $\overline{BB'} = 6$.



Tema 10 HIPERBOLA Y PARABOLA

La hipérbola y la parábola son curvas que, como la circunferencia y la elipse, aparecen con frecuencia en la física y en la ingeniería.

La ley de Boyle Mariotte queda bien descrita por una hipérbola; la trayectoria de un proyectil está bien aproximada por una parábola, etc.

En este tema centraremos el interés en las ecuaciones reducidas de la hipérbola y de la parábola, aunque también consideremos, como en el anterior, otras ecuaciones más generales de estas curvas.

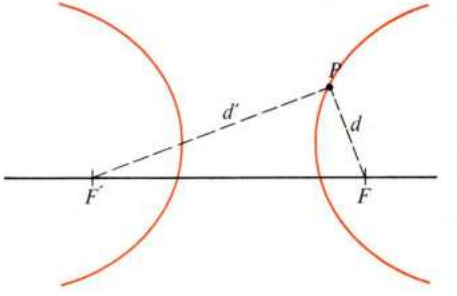
1 Hipérbola y sus elementos

1.1. *Se llama hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.*

Como en la elipse, la distancia $\overline{FF'}$ se llama *distancia focal*, y se designa por $2c$. (Fig. 1)

Si P es un punto de la hipérbola, los segmentos $\overline{PF'} = d'$ y $\overline{PF} = d$ son los *radios vectores* del punto P y su diferencia se designa por $2a$, $d' - d = 2a$. Como $\overline{PF'} - \overline{PF} < \overline{FF'}$, resulta: $2a < 2c$ y $a < c$.

La recta determinada por los focos F y F' se llama *eje focal* o *eje transverso*. La mediatriz del segmento $\overline{FF'}$ es el *eje no transverso*. El punto medio O del segmento $\overline{FF'}$ se llama *centro* de la hipérbola y es su centro de simetría.



(Fig. 1)

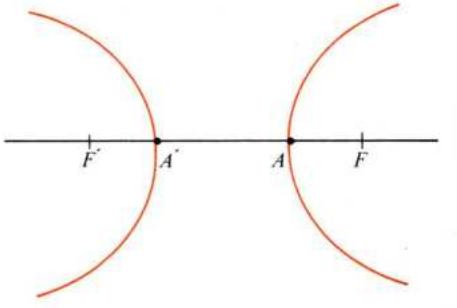
1.2. Los puntos A y A', donde la hipérbola corta al eje transverso, se llaman *vértices de la hipérbola* y determinan el segmento $\overline{AA'}$, que también se llama eje transverso o eje real de la hipérbola; se prueba, de modo análogo a como se hizo para la elipse, que $\overline{AA'} = 2a$.

En efecto: por ser A' un punto de la hipérbola,

$\overline{A'F} - \overline{A'F'} = 2a$ (Fig. 2) y como por simetría $\overline{A'F'} = \overline{AF}$, resulta:

$$\overline{A'F} - \overline{AF} = 2a \Rightarrow \overline{AA'} = 2a$$

Interesa considerar en la hipérbola un segmento de longitud b que sea el cateto de un triángulo rectángulo cuyos otros lados sean a y c.

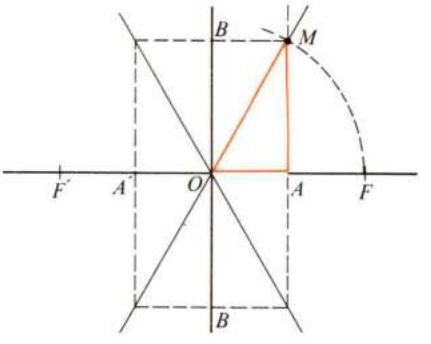


(Fig. 2)

En la figura 3 se ha construido el segmento $b = \overline{AM}$ trazando un arco de circunferencia de centro el punto O, radio $\overline{OF} = c$ y la perpendicular a $\overline{FF'}$ en el punto A; se forma así un triángulo rectángulo OAM de lados $\overline{OA} = a$, $\overline{OM} = \overline{OF} = c$ y $\overline{AM} = b$, en el que se verifica la relación $c^2 = a^2 + b^2$.

Si tomamos sobre el eje no transverso las distancias $\overline{OB} = \overline{OB'} = b$, se obtiene el segmento $\overline{BB'} = 2b$, que se llama también *eje no transverso*, y en ocasiones, *eje conjugado* o *eje imaginario*. (Fig. 3)

El cociente $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}$ se llama *excentricidad* de la hipérbola, y por ser $c > a$, e es un número mayor que 1.



(Fig. 3)

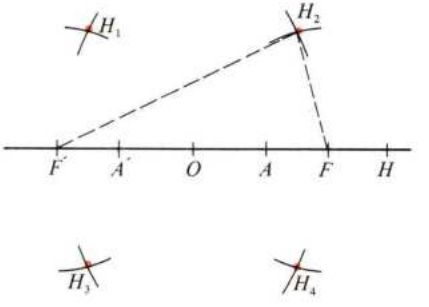
1.3. *Trazado de la hipérbola*

Conociendo los focos F y F' y el eje $\overline{AA'} = 2a$ es fácil obtener tantos puntos de la hipérbola como se deseen. Para ello consideremos un punto H situado en el eje transverso y exterior al segmento $\overline{F'F}$ (Fig. 4); haciendo centro en F y F' sucesivamente se trazan dos arcos de radio $\overline{AH}$. Después, con radio $\overline{A'H}$ y centros en F' y en F se trazan otros dos arcos que cortan a los primeros en cuatro puntos H_1, H_2, H_3 y H_4, que pertenecen a la hipérbola.

En efecto, para el punto H_2 se tiene

$$\overline{H_2F} - \overline{H_2F'} = \overline{AH} - \overline{HA'} = 2a$$

Tomando otro punto exterior al segmento $\overline{F'F}$, distinto de H, se obtienen otros cuatro puntos de la hipérbola. De este modo se pueden obtener tantos puntos como se deseen.



(Fig. 4)

2 Ecuación de la hipérbola

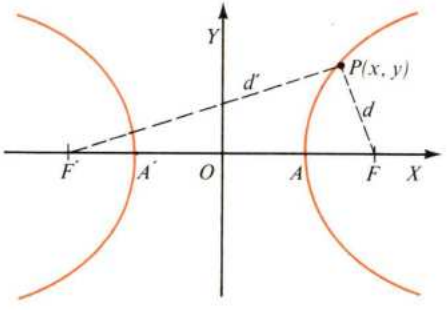
2.1. Vamos a obtener la ecuación de la hipérbola para el caso en que adoptemos como eje de abscisas el eje focal y como eje de ordenadas el eje no transverso. (Fig. 5)

Como $\overline{FF'} = 2c$ las coordenadas de los focos son $F'(-c, 0)$ y $F(c, 0)$

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la hipérbola, se tiene por definición $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$.

Analíticamente, esta relación se escribe:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$



(Fig. 5)

Procediendo como en el caso de la elipse se obtiene la expresión $x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$, o, lo que es lo mismo, $x^2b^2-a^2y^2=a^2b^2$ [1], en donde $b^2=c^2-a^2$.

Dividiendo por $a^2b^2\neq 0$, resulta $\mathbf{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$ [2], que es la ecuación de la hipérbola referida a sus ejes o *ecuación reducida de la hipérbola.*

Ejemplos:

- Vamos a hallar la ecuación y la excentricidad de la hipérbola que tiene como focos los puntos $F'(-5,0)$, $F(5,0)$ y 6 como diferencia de los radios vectores.

$$d'-d=2a=6\Rightarrow a=3$$
$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{16}=4$$

Por tanto, la ecuación es: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

La excentricidad $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{3}$

- Sea la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$

Entonces, $a^2=25$, $b^2=4$, $a=5$ y $b=2$.

El eje transverso o real es $\overline{AA'}=2a=10$.

El eje no transverso o conjugado es $\overline{BB'}=2b=4$.

Como $c=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$ la excentricidad $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{29}}{5}$

2.2. A partir de las ecuaciones [1] o [2] se pueden obtener las siguientes propiedades de la hipérbola:

Sea $P(x, y)$ un punto de la hipérbola. Los puntos:

$P'(-x, y)$, simétrico de P respecto al eje OY;

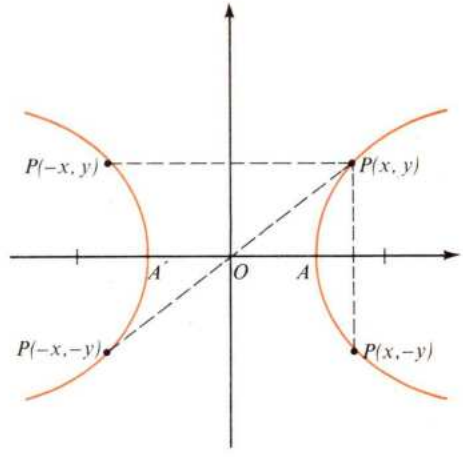
$P''(x, -y)$, simétrico de P respecto al eje OX, y

$P'''(-x, -y)$, simétrico de O respecto al origen O,

pertenecen también a la hipérbola (Fig. 6), lo que prueba que ésta es simétrica respecto a su centro y a sus ejes.

Si hacemos $y=0$ en [1] o en [2], resulta $x^2=a^2$, de donde $x=\pm a$, lo que significa que la hipérbola corta al eje en los puntos de abscisas $+a$ y $-a$; estos puntos, $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, son los vértices de la hipérbola que determina el eje transverso o real $\overline{AA'}$, cuya longitud es $2a$.

Haciendo $y=0$ en [1] o en [2], resulta $y^2=-b^2$, ecuación que no tiene solución real, lo que significa que la curva no corta al eje no transverso.



(Fig. 6)

Ejercicios:

1. Halla la ecuación de una hipérbola que tiene como focos los puntos $(-13,0)$, $(13,0)$ y 10 como diferencia de los radios vectores.

2. Calcula los semiejes, las coordenadas de los focos y la excentricidad de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

3. De la ecuación $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$ se obtiene, elevando al cuadrado y simplificando, $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=x\frac{c}{a}-a$, es decir, para el radio vector $\overline{PF}=d$ (Fig. 5) se tiene: $d=xe-a$.

   De manera análoga, prueba que $d'=xe+a$.

3 Asíntotas de la hipérbola

Si por los vértices $A(a, 0)$ y $A'(-a, 0)$ trazamos las perpendiculares al eje x, y por los vértices $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$ las perpendiculares al eje y, se obtiene un rectángulo llamado *rectángulo fundamental* de la hipérbola, que tiene por dimensiones $2a$ y $2b$. (Fig. 7)

Las diagonales de este rectángulo tienen por ecuaciones $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$, ya que son rectas que pasan por el origen y por los puntos (a, b) y $(a, -b)$, respectivamente.

Veamos que *la distancia entre dos puntos de igual abscisa y ordenada del mismo signo, uno P de la curva y otro Q de una de las rectas, tiende a cero cuando dicha abscisa tiende a infinito.*

En efecto:

Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y')$, donde y e y' son positivos.

Por ser $P(x, y)$ un punto de la hipérbola, se tiene:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, de donde $\overline{SP}^2 = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ [3]

Por otra parte, como $Q(x, y')$ es un punto de la recta $\overline{OQ}$, resulta: $\overline{SQ}^2 = y'^2 = \frac{b^2}{a^2}x$ [4].

De [3] y [4] se obtiene: $\overline{SQ}^2 - \overline{SP}^2 = y'^2 - y^2 = b^2$, o sea,

$(y' + y)(y' - y) = b^2$, de donde $\overline{SQ} - \overline{SP} = y' - y = \frac{b^2}{y' + y}$

De [3] y [4] se deduce que cuando x tiende a infinito, y e y' también tienden a infinito, y, por tanto, la suma $y + y'$ tiende a infinito, mientras que la diferencia $y' - y$ entre la ordenada de la curva y la de la recta tiende a cero.

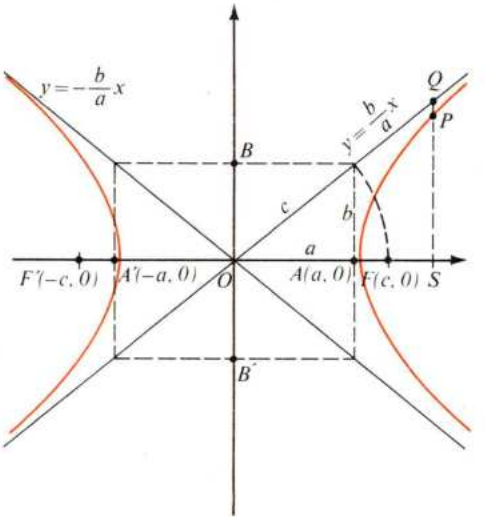
En consecuencia, *las dos ramas de la hipérbola se aproximan indefinidamente a las rectas de ecuaciones*

$$\mathbf{y = \frac{b}{a}x} \quad \text{e} \quad \mathbf{y = -\frac{b}{a}x} \ [5]$$

Dichas rectas reciben el nombre de *asíntotas de la hipérbola.*

Ejemplos:

- Las asíntotas de la hipérbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ son $y = \frac{3}{5}x$ e $y = -\frac{3}{5}x$, pues $a = 5$ y $b = 3$.



(Fig. 7)

• Consideremos la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, cuyas asíntotas son $y = \frac{4}{3}x$ e $y = -\frac{4}{3}x$.

Calculemos la diferencia entre la ordenada de la hipérbola y la de la asíntota $y = \frac{4}{3}x$ en el punto de abscisa $x_1 = 2.000$.

Se tiene:

ordenada de la asíntota $y' = \frac{4}{3}\,2.000 = 2666'666666$

ordenada de la curva $y = \frac{4}{3}\sqrt{x_1^2 - 9} = \frac{4}{3}\sqrt{2.000^2 - 9} =$

$= 2666'663665$

Diferencia $y'_1 - y_1 = 0{,}003001$.

Esta diferencia, tan pequeña, da idea del grado de aproximación de la curva a la asíntota.

4. Halla las ecuaciones de las asíntotas de las siguientes hipérbolas:

a) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 4$; d) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} = 1$

b) $4x^2 - 8y^2 = 1$; e) $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$

c) $\frac{9x^2}{16} - y^2 = 1$; f) $\frac{x^2}{9} - y^2 = 16$

4 Hipérbola equilátera: ecuación referida a sus asíntotas

4.1. Las hipérbolas en las que los semiejes son iguales se llaman equiláteras. Para obtener su ecuación basta hacer $a = b$ en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, de donde resulta

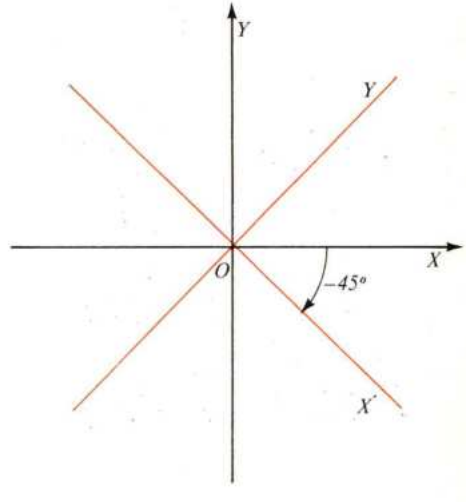
$$\mathbf{x^2 - y^2 = a^2}$$

Análogamente, haciendo $a = b$ en las ecuaciones $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$, se obtienen $\mathbf{y = x}$ e $\mathbf{y = -x}$, que son las ecuaciones de las asíntotas.

Como se ve, las asíntotas de la hipérbola equilátera coinciden con las bisectrices del primero y segundo cuadrante, luego son perpendiculares entre sí.

4.2. Vamos a obtener la ecuación de la hipérbola referida a sus asíntotas, es decir, tomando como ejes coordenados las asíntotas y siendo el semieje positivo la semirrecta OX' (Fig. 8)

Para ello giremos los ejes en el sentido de las agujas de un reloj hasta que el eje OX coincida con la asíntota del cuarto cuadrante.



(Fig. 8)

Teniendo en cuenta que el ángulo girado es -45, resulta, aplicando las fórmulas de transformación estudiadas en el tema 6,

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha = x'\cos(-45) - y'\operatorname{sen}(-45) \\ y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha = x'\operatorname{sen}(-45) - y'\cos(-45) \end{cases}$$

es decir,

$$x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}; \quad y = \frac{-x' + y'}{\sqrt{2}}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación $x^2 - y^2 = a^2$ se tiene:

$$\frac{(x' + y')^2}{2} - \frac{(-x' + y')^2}{2} = a^2, \text{ de donde } x'y' = \frac{a^2}{2}$$

Por tanto la ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas es de la forma $\mathbf{xy = k}$ o $\mathbf{y = \frac{k}{x}}$, donde

$$k = \frac{a^2}{2}$$

Si $k > 0$, las ramas de la hipérbola están situadas en el primero y tercer cuadrantes, y si $k < 0$, dichas ramas están en los cuadrantes segundo y cuarto.

Ejemplo:

- La ecuación $xy = 6$ representa una hipérbola equilátera referida a sus asíntotas. (Fig. 9)

  Como la ecuación asintótica de la hipérbola es de la forma $xy = \frac{a^2}{2}$, para calcular el semieje a hacemos $\frac{a^2}{2} = 6$, de donde $a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

  Por tratarse de una hipérbola equilátera, los semiejes son iguales, luego $b = a = 2\sqrt{3}$; por tanto, la ecuación de la hipérbola referida a sus ejes es $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{12} = 1$, o también $x^2 - y^2 = 12$

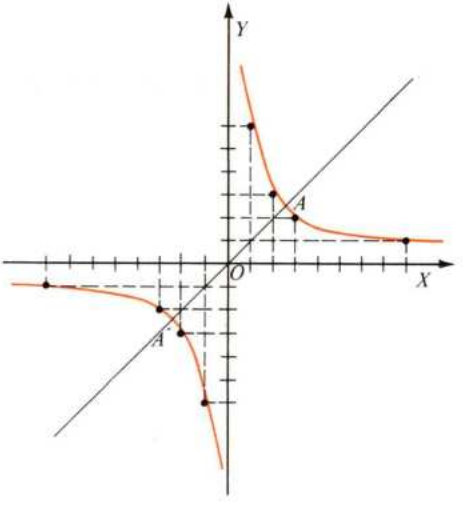
  Como $c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 12 = 24$, resulta que $c = \pm 2\sqrt{6}$, luego las coordenadas de los focos son $(2\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$ y $(-2\sqrt{6}, -2\sqrt{6})$

  Otra forma de proceder para calcular los semiejes es hacer $x = y$ en la ecuación $xy = 6$, con lo cual obtenemos las coordenadas de los vértices A y A'.

  $$x^2 = 6; x = \pm\sqrt{6}, \text{ luego } A(\sqrt{6}, \sqrt{6})\, A'(-\sqrt{6}, -\sqrt{6})$$

  El semieje a es la distancia del origen al vértice A.

  $$a = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6})^2} = \sqrt{6 + 6} = \sqrt{12}$$



(Fig. 9)

5. Dada la ecuación de la hipérbola equilátera de ecuación asintótica $xy = 3$, halla

1.º) Las coordenadas de los vértices.

2.º) Las coordenadas de los focos.

3.º) La ecuación de la hipérbola referida a los ejes.

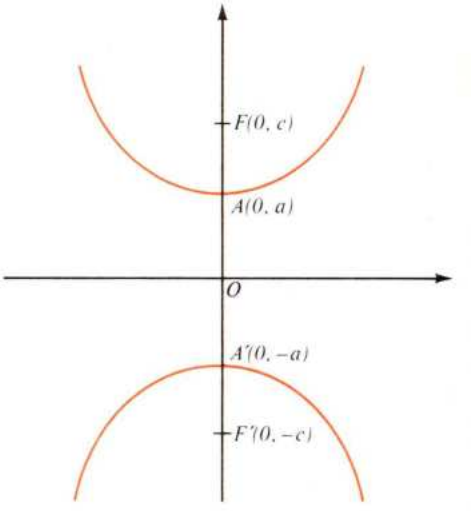
5 Otras ecuaciones de la hipérbola

5.1. En la figura 10 aparece una hipérbola cuyo centro coincide con el origen de coordenadas, y su eje transverso o real está sobre el eje OY.

En este caso las coordenadas de los focos y de los vértices son $F(0, c)$, $F'(0, -c)$, $A(0, a)$, $A'(0, -a)$, $B(b, 0)$, $B'(-b, 0)$.

De un modo totalmente análogo al caso de la elipse se obtiene que la ecuación de esta hipérbola es

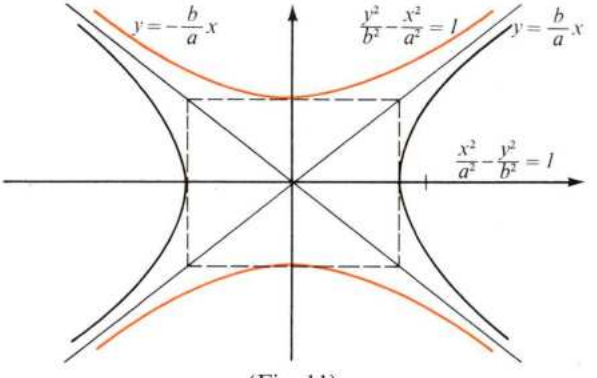
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$



(Fig. 10)

5.2. Para toda hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ [6], cuyos focos son los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, existe otra hipérbola con las mismas asíntotas cuyos focos están en el eje OY en los puntos $(0, c)$ y $(0, -c)$, que tiene por ecuación $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ [7].

Estas dos hipérbolas [6] y [7] se dicen *conjugadas*. (Fig. 11)



(Fig. 11)

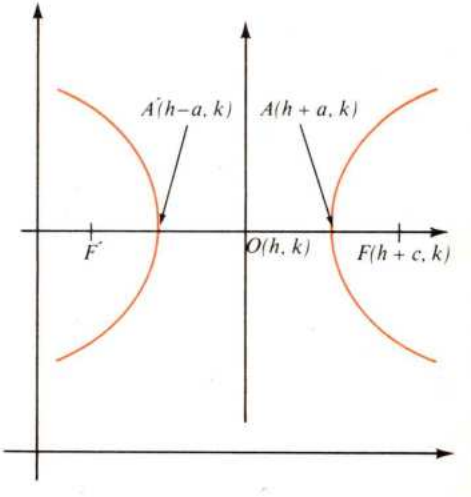
Ejemplo:

- Las hipérbolas $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ y $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$ son conjugadas; en consecuencia, tienen las mismas asíntotas

$$y = \frac{+6}{8}x$$

5.3. De modo análogo a como se hizo en la elipse, se puede obtener la ecuación de una hipérbola de centro el punto (h, k) y cuyo eje real transverso es paralelo al eje OX. (Fig. 12)

Esta ecuación es $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ [8]



(Fig. 12)

Las coordenadas de los focos y de los vértices son:

$F(h+c,\ k)\ \ F'(h-c,\ k),\ A(h+a,\ k),\ A'(h-a,\ k)\ \ B(h,\ k+b)$
$B'(h,\ k-b)$

Si la hipérbola de centro el punto (h, k) tiene su eje real paralelo al eje OY (Fig. 13), entonces su ecuación será

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1 \quad [9]$$

Los focos y los vértices tienen por coordenadas $F(h, k+c)$, $F'(h, k-c)$, $A(h, k+a)$, $A'(h, k-a)$, $B(h+b, k)$, $B'(h-b, k)$

Las hipérbolas de ecuaciones [8] y [9] tienen las mismas asíntotas, y sus ecuaciones son:

$$\mathbf{y-k=\frac{b}{a}(x-h),\quad y-k=-\frac{b}{a}(x-h)}$$

Ejemplo:

- Sea una hipérbola de centro (2,7) cuyo eje transverso es paralelo al eje x; si $2a = 8$ y $2b = 6$, su ecuación es

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-7)^2}{9} = 1$$

Como $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{25} = 5$, la excentricidad será

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

y las coordenadas de los focos

$$F(h+c,\ k) = (7,7),\ F'(h-c,\ k) = (-3,7)$$

Nota. Como en el caso de la elipse, de las ecuaciones [8] y [9] se obtiene, en general, una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad [10]$$

donde A y C tienen signos opuestos.

Recíprocamente, dada una ecuación de la forma [10] se puede pasar, en general, a una de las formas [8] o [9] completando cuadrados, reducción que es imposible en el caso de que se llegue a una expresión en la que el primer miembro es una diferencia de cuadrados y el segundo miembro es cero.

Ejemplo:

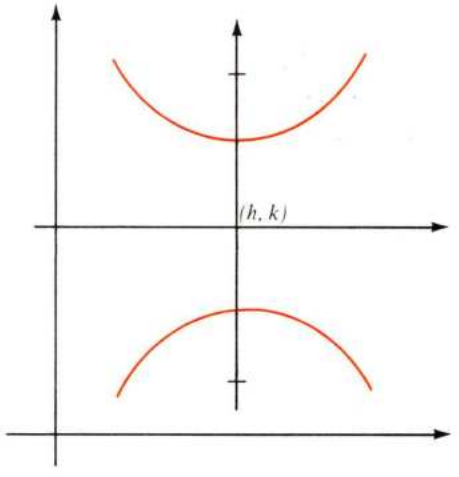
- Consideremos la ecuación $9x^2-4y^2-36x-24y-36=0$.
Se puede transformar del modo siguiente:

$9(x^2-4x)-4(y^2+6y)-36=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9(x^2-4x+\mathbf{4})-4(y^2+6y+\mathbf{9})-36+\mathbf{36}-\mathbf{36}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9(x-2)^2-4(y+3)^2=36 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{9}=1,$

que es una hipérbola de la forma [8]



(Fig. 13)

6. Halla la ecuación de una hipérbola sabiendo que:

a) El eje transverso es paralelo al eje OX y su centro es el punto (4,3)

b) $2a = 10$

c) $2c = 26$

7. Halla la excentricidad y las asíntotas de la hipérbola del ejercicio anterior.

8. Halla el centro y los ejes de las hipérbolas de ecuaciones

a) $x^2-9y^2+4x-5=0$

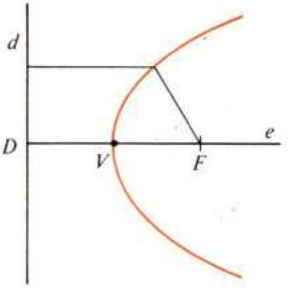
b) $4y^2-9x^2+16y+18x=29$

6 Parábola y sus elementos

6.1. *Se llama parábola al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.*

Designaremos el foco por F y la recta directriz por d.

La perpendicular desde el foco a la directriz se llama *eje de la parábola,* y la designaremos por e. El punto V, de intersección de la curva con el eje, se llama *vértice* de la parábola. La distancia $\overline{FD}$ desde el foco a la directriz, se llama *parámetro* de la parábola y se designa por p. (Fig. 14)



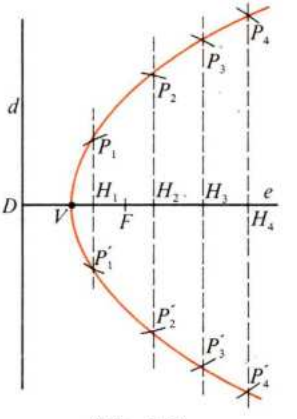
(Fig. 14)

6.2. *Trazado de la parábola por puntos*

El procedimiento más sencillo para trazar una parábola consiste en obtener puntos de la parábola situados en rectas paralelas a la directriz.

Dados d y F (Fig. 15), la perpendicular a d por F es el eje e. El vértice V de la parábola verifica $\overline{VF} = \overline{VD}$, luego es el punto medio de $\overline{FD}$. Tracemos las rectas r_1, r_2, r_3, etc., paralelas a la directriz. El arco de circunferencia de centro F y radio $\overline{H_1D}$ corta a r_1 en dos puntos, P_1 y P'_1, que por definición pertenecen a la parábola.

El arco de centro F y radio $\overline{H_2D}$ nos permite obtener los puntos P_2 y P'_2 de la parábola. De este modo podemos obtener cuantos puntos deseemos.



(Fig. 15)

7 Ecuaciones de la parábola

Según la posición del eje y del vértice, veremos cuatro casos.

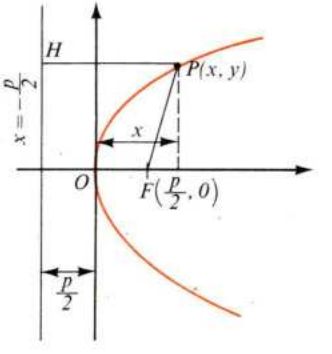
Primer caso. El eje de la parábola coincide con el de abscisas y el vértice, con el origen de coordenadas.

En este caso (Fig. 16) el foco tiene por coordenadas $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ y la directriz es la recta de ecuación $x = -\frac{p}{2}$

Sea $P\ (x,\ y)$ un punto cualquiera de la parábola; por definición se tiene:

$$\overline{FP} = \overline{HP}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$$



(Fig. 16)

Elevando al cuadrado, resulta: $x^2 + \frac{p^2}{4} - px + y^2 = x^2 + \frac{p^2}{4} + px$

y simplificando, se obtiene $\mathbf{y^2 = 2\,px}$ [1]

Nota. En el caso de la figura 17, el foco tiene por coordenadas $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ y la ecuación que se obtendría sería $\mathbf{y^2 = -2px}$

Ejemplos:

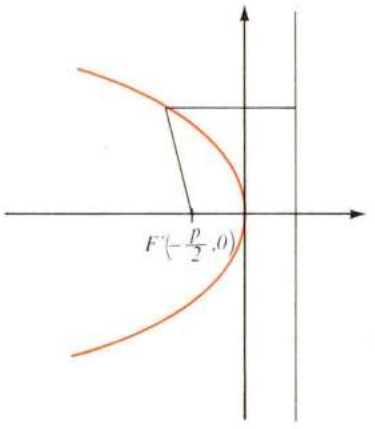
- El parámetro de la parábola $y^2 = 8x$ es: $2p = 8 \Rightarrow p = 4$

  Las coordenadas del foco son $F\left(\frac{p}{2}, 0\right) = F(2,0)$.

  El vértice es (0,0).

- Las coordenadas del foco en la parábola $y^2 = -x$ son:

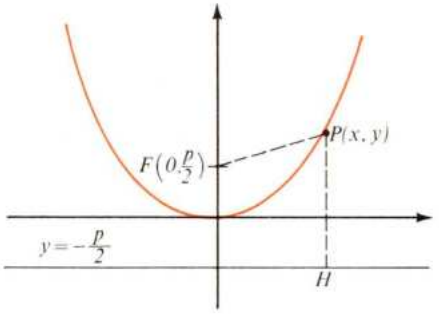
$$2p = -1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}, F\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$$



(Fig. 17)

Segundo caso. El eje de la parábola coincide con el eje de ordenadas y el vértice con el origen de coordenadas.

En este caso el foco tiene por coordenadas $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ y la directriz es la recta de ecuación $y = -\frac{p}{2}$ (Fig. 18)



(Fig. 18)

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola, se tiene:

$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2}$$

Elevando al cuadrado y simplificando resulta la ecuación

$$\mathbf{x^2 = 2py}$$

9. Halla el parámetro y las coordenadas del foco en las siguientes parábolas:

a) $y^2 = 2x$ c) $y^2 = \frac{4}{3}x$

b) $y^2 = -12x$ d) $y^2 = \frac{1}{5}x$

10. ¿Cuáles son los dos puntos de abscisa 2 en la parábola $y^2 = 8x$?

11. El vértice de una parábola es el punto (4,5) y la directriz la recta $x = 0$. Halla su ecuación.

Ejemplo:

- Calculemos las coordenadas del foco en la parábola:

$$x^2 = 6y;\ 2p = 6 \Rightarrow p = 3;\ F\left(0, \frac{p}{2}\right) = F\left(0, \frac{3}{2}\right)$$

- Sea $x^2 = -8y$. Entonces $-2p = -8 \Rightarrow p = 4$, luego $F\left(0, -\frac{p}{2}\right) = F(0, -2)$.

Tercer caso. El eje de la parábola es paralelo al eje OX y el vértice es el punto $V(h, k)$. (Fig. 19)

Trasladamos el origen de coordenadas al punto V. La ecuación de la parábola referida a los ejes VX' y VY' es:

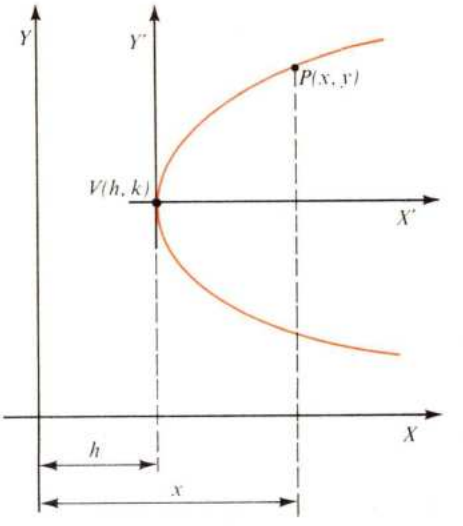
$$y'^2 = 2px' \qquad [2]$$

La fórmula de la traslación de ejes es:

$$\begin{cases} x = h + x' \\ y = k + y' \end{cases}$$

Si llevamos estos valores de x' e y' a [2] resulta:

$$\mathbf{(y-k)^2 = 2p\,(x-h)}$$



(Fig. 19)

Ejemplo:

- En la parábola $(y + 2)^2 = 12(x - 4)$ el vértice es $V(4, -2)$

  Como $2p = 12 \Rightarrow p = 6$, luego $\frac{p}{2} = 3$

  El foco se encuentra en la paralela al eje OX trazada por V, es decir, en la recta $y = 4$; por tanto, las coordenadas del foco son $F(4 + 3, -2) = F(7, -2)$

Cuarto caso. El eje de la parábola es paralelo al eje OY y el vértice es el punto $V(h, k)$. (Fig. 20)

La ecuación de la parábola referida a los ejes VX' y VY' es $x'^2 = 2py'$ referida a los ejes OX y OY queda:

$$\mathbf{(x-h)^2 = 2p\,(y-k)} \qquad [3]$$

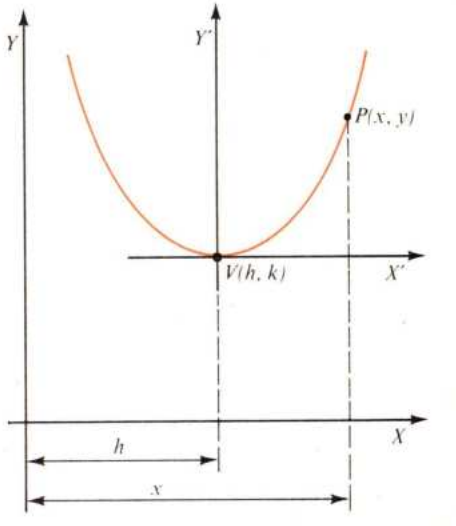
Si desarrollamos la ecuación [3] resulta:

$$x^2 - 2hx + h^2 = 2py - 2pk;\ \text{de donde}$$

$$y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{h}{p}x + k + \frac{h^2}{2p}$$

Haciendo $\frac{1}{2p} = a$, $\frac{-h}{p} = b$, $\beta + \frac{h^2}{2p} = c$ la ecuación [3] se transforma en $y = ax^2 + bx + c$

Si $a > 0$, la parábola está abierta hacia arriba, y si $a < 0$ está abierta hacia abajo.



(Fig. 20)

12. ¿Por qué deben ser del mismo signo p e y en la parábola $x^2 = 2py$?

Ejemplos:

- Calculemos el vértice, el foco y la ecuación de la directriz de la parábola $(x-5)^2 = 2(y+1)$

  El vértice es el punto $V(5,-1)$

  Como $2p = 2$, se tiene: $p = 1 \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{1}{2}$; el foco será:

  $$F\left(5, -1 + \frac{1}{2}\right) = F\left(5, -\frac{1}{2}\right)$$

  La ecuación de la directriz es: $y = -\frac{3}{2}$

- Dada la parábola $y = x^2 - 5x + 6$, se tiene:

  $$\frac{1}{2p} = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

  $$-\frac{h}{p} = -\frac{h}{\frac{1}{2}} = -2h = -5 \Rightarrow h = \frac{5}{2}$$

  $$k + \frac{h^2}{2p} = k + \frac{25}{4} = 6 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

  El vértice es $V\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. Como el coeficiente de x^2 es positivo y el eje de la parábola es paralelo al eje OY, el foco será:

  $F\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4} + \frac{p}{2}\right) = F\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (Fig. 21)

  Los puntos de intersección con el eje OX se obtienen resolviendo el sistema $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = 0 \end{cases}$ y resulta: $x_1 = 2, x_3 = 0$.

  Estos puntos son $P_1(2,0), \cdot P_2(3,0)$

  Nota: En el tema 15 estudiaremos otro método más sencillo y rápido para obtener el vértice de una parábola.

- Vamos a hallar la ecuación de una parábola que tiene por directriz la recta $y + 1 = 0$ y por vértice el punto $V(3,2)$. El eje de la parábola es paralelo al eje de ordenadas. (Fig. 22)

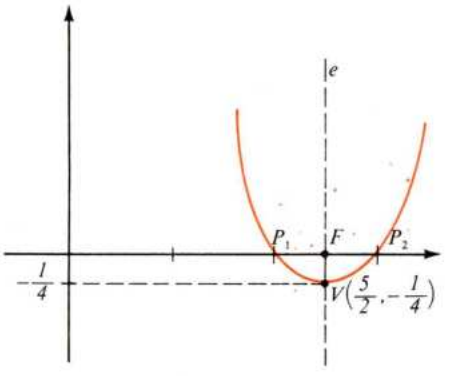
  Como $\overline{VD} = 3$, el parámetro es $p = 6$, luego las coordenadas del foco son $F(3,5)$.

  Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola, se tendrá $\overline{PF} = \overline{PH}$; es decir:

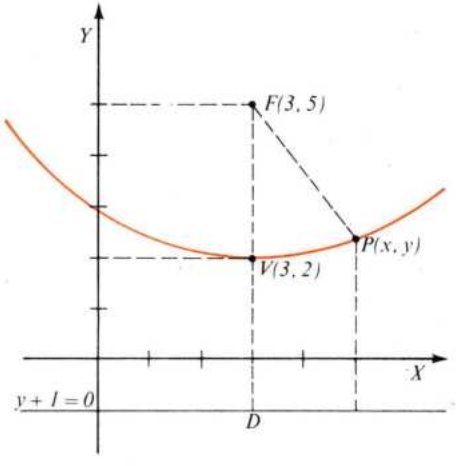
  $$\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = y + 1 \quad \text{(Fig. 22)}$$

  Elevando al cuadrado y simplificando se obtiene la ecuación:

  $$y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{4}$$



(Fig. 21)



(Fig. 22)

13. Calcula el vértice, el foco y la ecuación de la directriz en la parábola $(x-7)^2 = 4(y+3)$

14. Dada la parábola $y = x^2 - 2x - 8$, calcula:

a) El parámetro.

b) Las coordenadas del vértice.

c) Las coordenadas del foco.

d) Puntos de intersección con el eje de abscisas.

• Hallemos la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $6x + 8y = 0$ y por foco el punto $F(1,0)$

Si $P(x, y)$ es un punto cualquiera de la parábola, su distancia a la directriz es: $\dfrac{6x + 8y}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \dfrac{6x + 8y}{10} = \dfrac{3x + 4y}{5}$

Como la distancia $\overline{PF}$ es: $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ resulta para la ecuación de la parábola: $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \dfrac{3x + 4y}{5}$; elevando al cuadrado y simplificando resulta:

$$16x^2 + 9y^2 - 24xy - 50x + 25 = 0$$

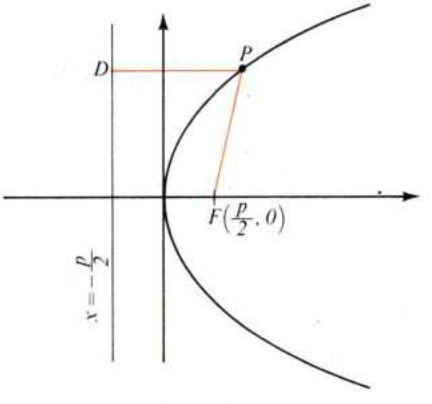
15. Halla la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta de ecuación $y = -2$ y por vértice el punto $V(4,1)$.

16. Halla la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $5x - 12y + 6 = 0$ y por foco el punto $(4,0)$.

8 Propiedades comunes a las tres cónicas

8.1. A lo largo de este tema y en el tema anterior, se ha visto que las ecuaciones de la elipse, de la hipérbola y de la parábola son ecuaciones de segundo grado en las coordenadas.

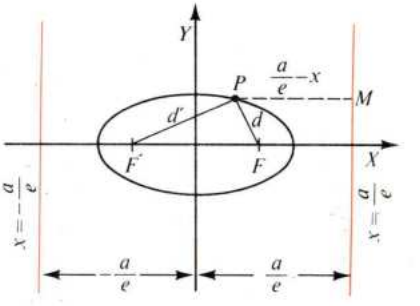
Veamos a continuación otras propiedades comunes.
Ya se vio que en la parábola $y^2 = 2px$ la directriz era la recta de ecuación $x = -\dfrac{p}{2}$. Por otra parte, al ser $\overline{PF} = \overline{PD}$ resulta $\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PD}} = 1 =$ constante. (Fig. 23)



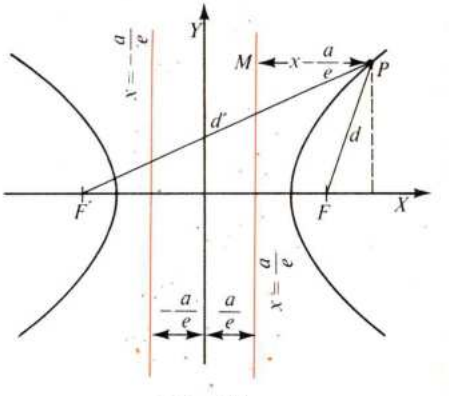
(Fig. 23)

En la elipse y en la hipérbola, se llaman directrices a las rectas de ecuaciones $x = \dfrac{a}{e}$; $x = -\dfrac{a}{e}$ (Figs. 24 y 25)

Vamos a probar que, al igual que en la parábola, la razón de distancias de un punto cualquiera de dichas curvas al foco y a la directriz es una constante: la excentricidad.



(Fig. 24)



(Fig. 25)

Recordemos para ello (ver ejercicio **21** del tema 9) que en la elipse los radios vectores del punto P vienen dados por

$$d = a - ex, \quad d' = a + ex$$

y en la hipérbola (ver ejercicio **3** de este tema),

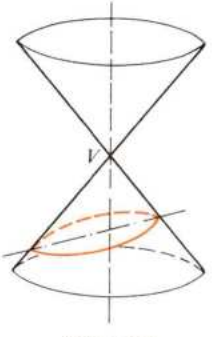
$$d = ex - a, \quad d' = ex + a$$

Entonces, para la elipse resulta: $\dfrac{d}{\overline{PM}} = \dfrac{a - ex}{\dfrac{a}{e} - x} = e$ (Fig. 24)

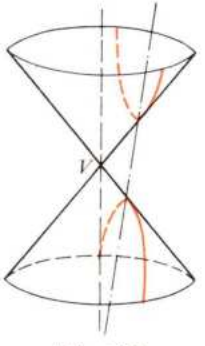
y para la hipérbola $\dfrac{d}{\overline{PM}} = \dfrac{ex - a}{x - \dfrac{a}{e}} = e$ (Fig. 25)

En consecuencia, las tres cónicas tienen la propiedad de que *para todos sus puntos, la razón de sus distancias a un foco y a la directriz es una cantidad constante.*

8.2. La elipse, la hipérbola y la parábola se conocen con el nombre de *cónicas* debido a que se pueden obtener al cortar una superficie cónica de revolución por un plano que no pasa por el vértice. El tipo de cónica obtenido dependerá de la inclinación del plano respecto al eje de dicha superficie, como se observa en las figuras 26, 27 y 28.



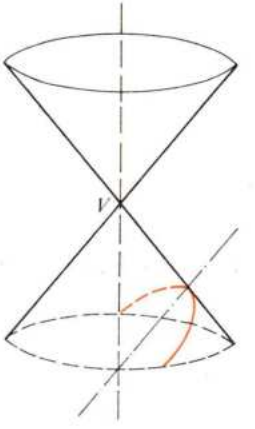
(Fig. 26)



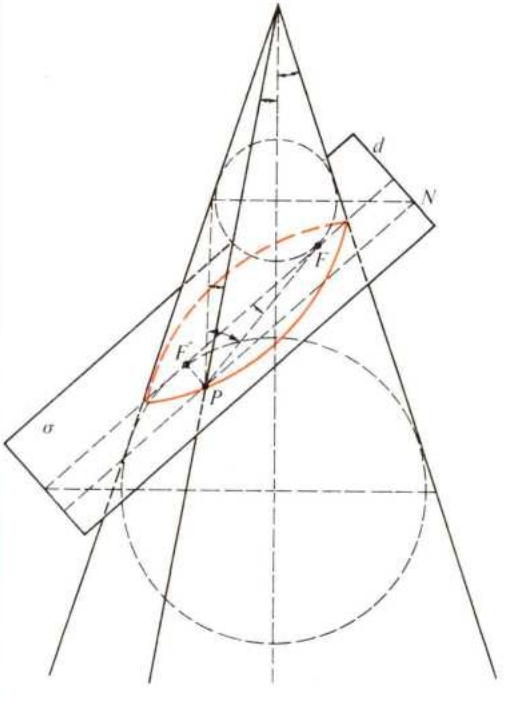
(Fig. 27)

Se puede probar, aunque no lo haremos por no alargar excesivamente el tema, la siguiente propiedad:

Si σ es un plano que no pasa por el vértice de la superficie cónica (Fig. 29) y P es un punto cualquiera de la curva de intersección de dicho plano σ con la superficie cónica, entonces se verifica $\dfrac{\overline{PF}}{\overline{PN}} =$ constante. Es decir, para todo punto P la razón de sus distancias a un foco F y a la directriz d es constante, que es la condición característica de las cónicas.



(Fig. 28)



(Fig. 29)

Ejercicios y cuestiones

17. Halla los ejes, los focos y las ecuaciones de las asíntotas en las hipérbolas de ecuaciones:

a) $x^2 - 9y^2 = 1$

b) $x^2 - 9y^2 = 36$

c) $4x^2 - 9y^2 = 36$

d) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

18. Se llama parámetro de una hipérbola a la medida de la cuerda perpendicular al eje focal que pasa por el foco. Prueba que en la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ el parámetro vale $\frac{2b^2}{a}$

19. Halla la ecuación de una hipérbola cuyo eje transverso está sobre el eje y, su centro en el origen y que pasa por los puntos (4,6) y (1,−3).

20. Halla el centro, vértices, focos y asíntotas en las siguientes hipérbolas:

a) $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0$

b) $2x^2 - 3y^2 + 4x + 12y + 4 = 0$

c) $y^2 - x^2 + 2y - 2x - 1 = 0$

d) $5x^2 - 4y^2 - 20x - 24y - 36 = 0$

21. Demuestra que si e_1 y e_2 son las excentricidades de dos hipérbolas conjugadas, entonces

$$e_1^2 + e_2^2 = e_1^2 \cdot e_2^2$$

22. Prueba que la longitud de la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de la parábola de ecuación $y^2 = 2px$ es igual a $2p$.

23. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan:

a) de la recta $x = -4$ y del punto (4,0)

b) de la recta $x = 0$ y del punto (2,3)

c) de la recta $x = 2$ y del punto (4,6)

24. Dada la parábola $y = x^2 - 10x + 16$, calcula:

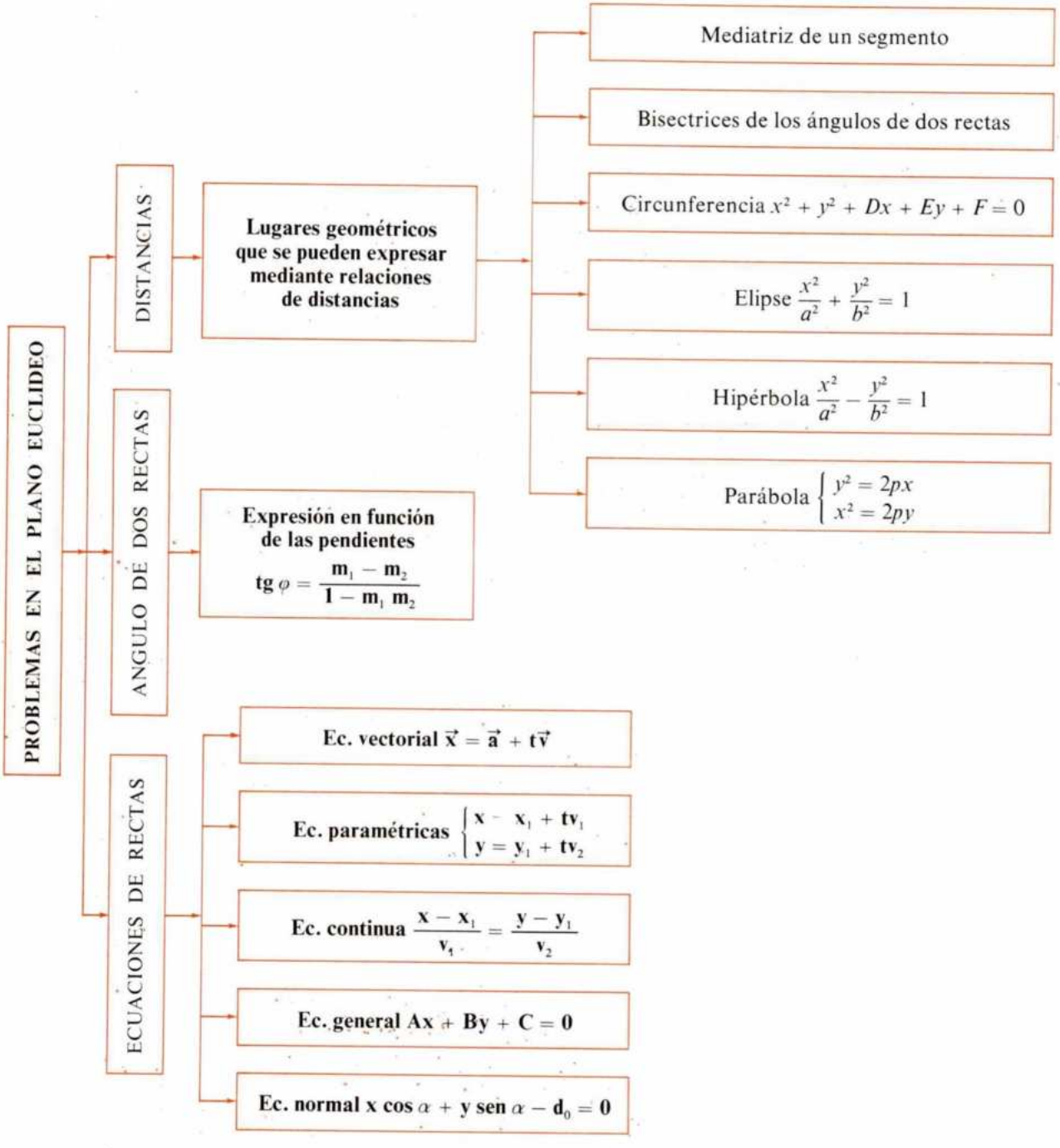
a) El parámetro y las coordenadas del vértice.

b) Las coordenadas del foco.

c) Los puntos de intersección con el eje de abscisas.

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD 3

GEOMETRIA EUCLIDEA DEL PLANO



Unidad 4

LOS NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

En 1.º de B.U.P. has estudiado el conjunto de los números complejos, en el cual se introducían dos leyes de composición interna que les conferían estructura de cuerpo. En esta Unidad vamos a continuar el estudio de los números complejos introduciendo una nueva representación de aquéllos, que nos permitirá un cálculo mucho más rápido y efectivo de ciertas operaciones. Concretamente, en el curso anterior habías calculado las raíces cuadradas de un número complejo utilizando la forma binómica, lo cual conducía a resolver una ecuación de segundo grado; sin embargo, no se había abordado el cálculo de raíces de orden mayor debido a la complicación y dificultad de los cálculos necesarios. Con la nueva representación el cálculo de las raíces n-ésimas para cualquier n es automático.

Esta nueva representación, que llamaremos módulo-argumental o polar, se basará en la correspondencia que existe entre números complejos y puntos del plano (ya estudiada en el curso primero); es por ello esencial el repaso de los temas ya conocidos de números complejos.

Tema 11

1. Módulo de un número complejo.
2. Propiedades del módulo de un número complejo.
3. Coordenadas polares en el plano euclídeo.
4. Paso de coordenadas cartesianas a polares y de polares a cartesianas.
5. Formas polar y trigonométrica de un número complejo.
6. Igualdad de números complejos en forma polar.

Tema 12

1. Producto de números complejos.
2. Cociente de números complejos.
3. Potencia de un número complejo.
4. Raíces n-ésimas de un número complejo.

Tema 11

FORMA POLAR DE UN NUMERO COMPLEJO

En primer curso de B.U.P. has estudiado dos tipos de representaciones de los números complejos: por una parte, respecto de un sistema de coordenadas cartesianas, a cada complejo $z = a + bi$ se le podía asociar de forma biunívoca el punto P de coordenadas (a, b), que se llama el afijo del complejo z; por otra parte, este punto P determinaba con el origen O un vector $\overrightarrow{OP}$, de forma que se tenía una correspondencia biunívoca entre números complejos y vectores con origen en O.

En este tema vamos a estudiar otra representación de los números complejos, asociándole a cada número complejo distinto de cero un par (ρ, θ), donde ρ es un número real y θ un ángulo.

Esta correspondencia no será, en general, biunívoca, pero podrá hacerse biunívoca restringiendo convenientemente el campo de valores del ángulo θ.

La representación que vamos a estudiar se llama forma polar del número complejo, o también forma módulo-argumental, y nos será de gran utilidad en el cálculo con números complejos.

1 Módulo de un número complejo

Sea $z = a + bi$ un número complejo; se llama *conjugado de* z, y se escribe $\bar{z}$, al número complejo $\bar{z} = a - bi$.

Ejemplos:

- Si $z = 3 + 2i$, entonces $\bar{z} = 3 - 2i$
- Si $z = 1 - \frac{1}{2}i$, entonces $\bar{z} = 1 + \frac{1}{2}i$

Se llama *módulo* o valor absoluto del número complejo $z = a + bi$, y se representa por $|z|$, a la raíz cuadrada positiva de $z \cdot \bar{z}$.

$$|z| = +\sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Dado que $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, se sigue que

$$|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo:

- Sea $z = \frac{1}{3} - \frac{3}{4}i$; entonces $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{97}}{12}$

Ejercicios:

1. Halla el conjugado de los siguientes números complejos: $0, 8, 2i, 3 + 4i, \frac{2}{3} - i$

2. Halla el módulo de los siguientes números complejos: $-8, 3i, 4 + i, 2 - \frac{1}{3}i$

2 Propiedades del módulo de un número complejo

El módulo de un número complejo verifica las siguientes propiedades:

a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $|-z| = |z|$

c) $|\bar{z}| = |z|$

d) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

e) $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$

f) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

g) Si $c \in \mathbb{R}$, $|c\, z| = |c||z|$, donde $|c|$ representa el valor absoluto de c.

Las demostraciones de las propiedades a), b), c) y g) son inmediatas.

Demostremos la propiedad e):

$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|$ (por la propiedad d).

Restando $|z_2|$, se obtiene:

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$$

3. Dados los números complejos $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 1 + i$, halla $|z_1^2 + z_2|$

4. Un número complejo es de la forma $z = 3 + bi$ y un módulo es 9. Halla z.

5. Demuestra las propiedades a), b), c) y g).

6. Demuestra, consultando el libro de 1.º de B.U.P., las propiedades d) y f).

7. Dados los números complejos $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 1 + 3i$, halla $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$ y comprueba que $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$

3 Coordenadas polares en el plano euclídeo

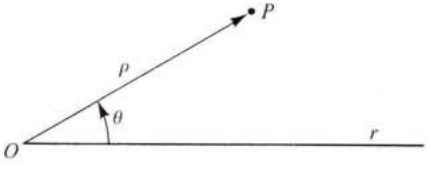
Consideremos en el plano euclídeo un punto O y una semirrecta r con origen O.

A cada punto P del plano le está asociado, como se ve en la figura 1, un único vector con origen O, que es precisamente el vector $\overrightarrow{OP}$; por otra parte, todo punto distinto de O determina un único ángulo θ, que es el determinado por la semirrecta r y el vector $\overrightarrow{OP}$ medido en el sentido positivo de giro (es decir, sentido contrario a las agujas de un reloj).

Podemos entonces, fijado el punto O y la semirrecta r, asociar a cada punto P del plano distinto de O el par (ρ, θ) donde

$$\rho = |\overrightarrow{OP}|$$

y θ es el ángulo determinado por la semirrecta r y el vector $\overrightarrow{OP}$ medido en sentido positivo de giro.



(Fig. 1)

Observa que:

a) a todo punto del plano, *excepto O*, podemos asociarle un único par (ρ, θ) en la forma indicada,

b) $0 < \rho$, c) $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

Nota: La desigualdad estricta en la condición c) es necesaria para que a cada punto le corresponda un único par; de otro modo, los pares $(\rho, 0)$ y $(\rho, 2\pi)$ corresponderían al mismo punto. Sin embargo, no hay dificultad en utilizar ángulos superiores a 2π, conviniendo en que los pares (ρ, θ) y $(\rho, \theta + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$, representan el mismo punto.

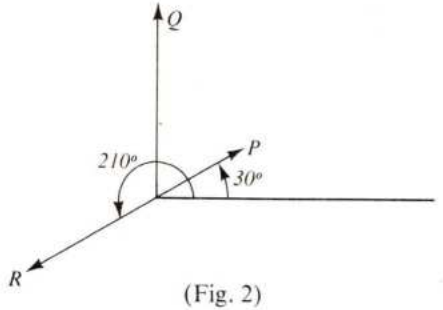
$\{O, r\}$ se dice que es un *sistema de coordenadas polares:*

el punto O se dice el *origen*, y la recta r, el *eje polar*.

El par (ρ, θ) recibe el nombre de *coordenadas polares del punto P* respecto del sistema polar $\{O, r\}$.

Ejemplo:

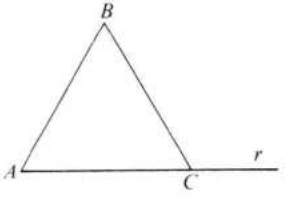
- Las coordenadas polares de los puntos P, Q y R de la figura 2 son, respectivamente: $(2,30^\circ)$, $(4,90^\circ)$, $(3,210^\circ)$.



(Fig. 2)

8. Dibuja un sistema de coordenadas polares y representa los puntos cuyas coordenadas polares son: $(2,60^\circ)$, $(1,90^\circ)$, $(3,180^\circ)$, $(5,300^\circ)$.

9. Se considera el siguiente triángulo equilátero:



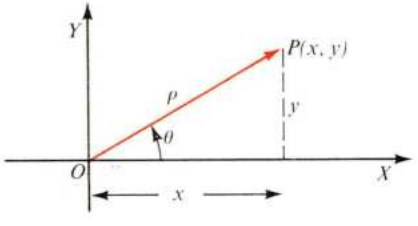
Se toma como sistema de coordenadas polares $\{A, r\}$ y se sabe que el lado del triángulo es 13 m. Halla las coordenadas polares de los vértices B y C.

4 Paso de coordenadas cartesianas a polares y de polares a cartesianas

4.1. *Paso de coordenadas cartesianas a polares*

Vamos a considerar el sistema de coordenadas polares con origen el origen del sistema cartesiano y con eje polar el semieje positivo de abscisas, como se indica en la figura 3.

El problema que nos proponemos resolver es el siguiente: Si conocemos las coordenadas cartesianas (x, y) del punto P, ¿cuáles son sus coordenadas polares respecto al sistema (O, OX)?



(Fig. 3)

Por el Teorema de Pitágoras, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; por otra parte, $\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$, luego $\theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}$ si $x \neq 0$; si $x = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ó $\theta = \frac{3\pi}{2}$, luego las fórmulas de cambio son:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x} \end{cases}$$

Nota: Dado que $\text{tg}\,\theta = \text{tg}\,(\theta + \pi)$, para ver si debemos elegir θ o $\theta + \pi$ debemos consultar gráficamente en qué cuadrante está el punto P.

Ejemplos:

- Consideremos el punto P de coordenadas cartesianas (4,4); entonces sus coordenadas polares serán:

$$\rho = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$\theta = \text{arc tg}\,\frac{4}{4} = \text{arc tg}\,1$, luego $\theta = 45°$ o $\theta = 225°$

Como el punto P está en el primer cuadrante, sus coordenadas polares serán entonces $(4\sqrt{2}, 45°)$

- ¿Cuáles serán las coordenadas polares del punto P cuyas coordenadas cartesianas son $(2, -2\sqrt{3})$?

Se tiene: $\rho = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$

$$\theta = \text{arc tg}\left(\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right) = \text{arc tg}\,(-\sqrt{3}),$$

luego $\theta = 120°$ ó $\theta = 300°$. Como el punto P está en el cuarto cuadrante, las coordenadas polares de P serán $(4, 300°)$.

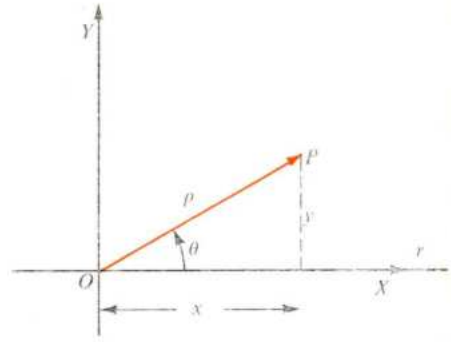
4.2. *Paso de coordenadas polares a cartesianas*

Consideremos el sistema de coordenadas polares $\{O, r\}$ y el cartesiano OXY de la figura 4. Vamos a resolver el problema recíproco del anterior, es decir: conocidas las coordenadas polares (ρ, θ) del punto P, hallar sus coordenadas cartesianas (x, y).

En el triángulo rectángulo OPQ se tiene:

$$x = \rho \cos \theta$$
$$y = \rho \text{ sen } \theta,$$

luego las coordenadas cartesianas del punto de coordenadas polares (ρ, θ) son $(\rho \cos \theta, \rho \text{ sen } \theta)$.



(Fig. 4)

10. ¿Qué figura determinan en el plano todos los puntos que tienen coordenadas de la forma $(3, \theta)$ respecto a un sistema de coordenadas polares? ¿Y si las coordenadas son de la forma $(\rho, 15°)$? (θ y ρ, variables en cada caso).

11. Halla las coordenadas polares de los puntos cuyas coordenadas cartesianas son:

$(3, 4), (3, -3), (-3, 3\sqrt{3}), (-1, 1)$.

12. Halla las coordenadas cartesianas de los puntos cuyas coordenadas polares son:

$(1, 270°), (3, 180°), (2, 210°), (6, 330°)$.

Ejemplo:

- Las coordenadas cartesianas del punto (6,225°) son:

$$x = 6 \cos 225° = 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2}$$

$$y = 6 \operatorname{sen} 225° = 6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3\sqrt{2},$$

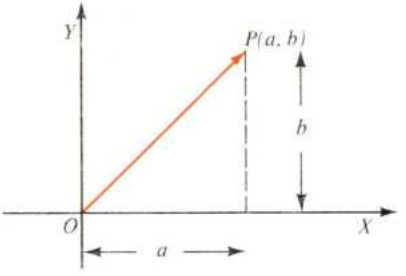
luego el punto P tiene de coordenadas cartesianas $(-3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$

5 Formas polar y trigonométrica de un número complejo

Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas OXY, como se indica en la figura 5. A cada número complejo $z = a + bi$ se le asocia de forma biyectiva el punto P de coordenadas (a, b); este punto (llamado afijo de P) determina con el origen de coordenadas un único vector $\overrightarrow{OP}$.

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

Resulta de la anterior igualdad que el módulo del complejo z es precisamente el módulo del vector $\overrightarrow{OP}$ asociado al número complejo.



(Fig. 5)

Por otra parte, recordemos que si $z = a + bi$ es un número complejo no nulo, se define su *argumento* como el ángulo que forma el eje real (eje de abscisas) con el vector $\overrightarrow{OP}$ asociado al complejo z medido en sentido positivo.

Resulta entonces que *el módulo y el argumento de un número complejo no nulo son precisamente las coordenadas polares de su afijo.*

Si el número complejo (a, b) tiene de módulo ρ y argumento θ, se escribe ρ_θ. Esta forma de expresar un número complejo recibe el nombre de *forma polar.*

Recordando las fórmulas de paso de coordenadas cartesianas a polares, se tiene:

$$z = a + bi = \rho \cos\theta + \rho \operatorname{sen}\theta\, i = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

Esta última forma de representar el número complejo se llama *forma trigonométrica.* Se tienen así cuatro formas de escribir un número complejo.

$(a, b) \longrightarrow$ forma cartesiana

$a + bi \longrightarrow$ forma binómica

$\rho_\theta \longrightarrow$ forma polar o módulo argumental

$\rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \longrightarrow$ forma trigonométrica.

13. Escribe en las formas polar y trigonométrica los siguientes números complejos:

$-i$, 8, $3-3i$, $2 + 2\sqrt{3}i$

14. Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:

$2(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$, $3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$

$6\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, $2\sqrt{2}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$.

Ejemplos:

- Consideremos el complejo $z = 3-3i$; entonces su módulo es $\rho = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$. Por otra parte, su argumento $\theta = \text{arc tg}\,\frac{-3}{3} = \text{arc tg}\,(-1)$; resulta que $\theta = 135^\circ$ o $\theta = 315^\circ$.

  Dado que el afijo de z es el punto $(3, -3)$, que está en el cuarto cuadrante, resulta $\theta = 315^\circ$, y por tanto, la forma polar de z es $3\sqrt{2}_{315}$ y su forma trigonométrica será:

$$z = 3\sqrt{2}\,(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ)$$

- Consideremos el complejo $z = i$. Se tiene $\rho = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.

  Como $a = 0$, tg θ no está definida, luego $\theta = \frac{\pi}{2}$ o $\theta = \frac{3\pi}{2}$,

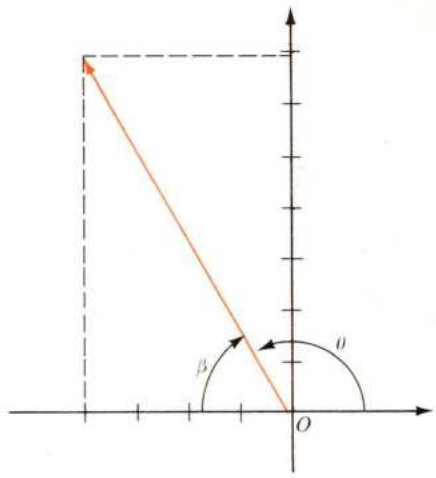
  como el afijo de i es (0,1) debe ser $\theta = \frac{\pi}{2}$, luego:

$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$$

- Para escribir en forma trigonométrica el número complejo $z = -4 + 4\sqrt{3}i$, calculamos en primer lugar su módulo (Fig. 6):

$$\rho = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$$

  El argumento viene dado por tg $\theta = \frac{4\sqrt{3}}{-4} = -\sqrt{3}$; luego $\theta = 120^\circ$ y $z = 8_{120^\circ} = 8(\cos 120 + i \operatorname{sen} 120)$



(Fig. 6)

15. Escribe en las formas polar y trigonométrica los números complejos siguientes:

a) $-6 - 6\sqrt{3}i$ c) $8 - 8\sqrt{3}i$

b) $-5 + 5i$ d) $4 + 4i$

6 Igualdad de números complejos en forma polar

Sean ρ_θ y r_α dos números complejos iguales escritos en forma polar.

Si (a, b) es el afijo del primero y (c, d) el del segundo, se tendrá: $\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$, lo cual exige que $\rho = r$.

Por otra parte, para que los afijos coincidan, los argumentos θ y α deben ser iguales o diferir en un número entero de vueltas, es decir, $\theta - \alpha = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Por tanto:

$$\rho_\theta = r_\alpha \Rightarrow \begin{cases} \rho = r \\ \theta - \alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ejemplo:

- Los números complejos $z_1 = 2_{30^\circ}$ y $z_2 = 2_{390^\circ}$ son iguales, ya que los módulos son iguales y los argumentos difieren en 360°.

Ejercicios y cuestiones

16. Halla el módulo de los siguientes números complejos: $z_1 = 2-3i$, $z_2 = 2 + i$ y comprueba que $|z_1| - |z_2| \neq |z_1 - z_2|$

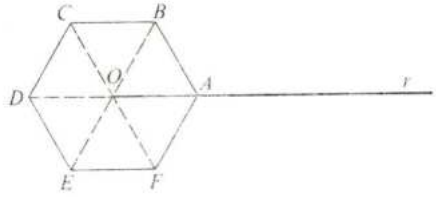
17. Demuestra que para un número complejo arbitrario z se verifica: $|z^n| = |z|^n$

18. Dos números complejos z_1 y z_2 son tales que $z_1 - z_2 = i$. ¿Puede ser $|z_1| - |z_2| = 2$?

19. Halla un número complejo z tal que $\text{Im}(z) = -2$ y $|z| = 9$.

20. Se considera el hexágono regular de la figura de lado $l = 5$ cm.

Halla las coordenadas polares de sus vértices respecto al sistema de coordenadas polares $\{O, r\}$



21. Halla las coordenadas polares de los puntos cuyas coordenadas cartesianas son $(-2, 3)$, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $(1, \sqrt{3})$, $(2, 4\sqrt{2})$.

(Ayúdate de tablas trigonométricas si fuese necesario.)

22. Halla las coordenadas cartesianas de los puntos cuyas coordenadas polares son $(1, 135°)$, $(3, 180°)$ $(1, 90°)$, $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(6, \frac{\pi}{8}\right)$

23. Escribe en forma polar y trigonométrica los siguientes números complejos: $2i$, -3, $2 + 2i$, $6\sqrt{3} - 6i$, $2 + 3i$.

24. Para escribir un número complejo, ¿qué argumento debes poner en los siguientes casos?

a) Un número real positivo.

b) Un número real negativo.

c) Un número imaginario positivo.

d) Un número imaginario negativo.

Tema 12

OPERACIONES CON NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

En el tema anterior has visto cómo un número complejo puede escribirse en la forma polar asociándole su valor absoluto, su módulo y su argumento.

Vamos a estudiar ahora en este tema cómo se obtienen el producto, cociente, potenciación y radicación de números complejos escritos en las formas polar y trigonométrica.

Como ya se ha dicho, mediante estas formas se simplifican notablemente los cálculos.

1 Producto de números complejos

Sean $z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) = \rho_{1_{\theta_1}}$ y $z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) = \rho_{2_{\theta_2}}$ dos números complejos; entonces:

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot \rho_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2 \left((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i (\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)\right) =$$

$$= \rho_1\rho_2 (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)), \text{ es decir,}$$

$$\rho_{1_{\theta_1}} \cdot \rho_{2_{\theta_2}} = (\rho_1\rho_2)_{(\theta_1 + \theta_2)}$$

La relación anterior nos dice que el producto de dos números complejos tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos de cada uno de los factores.

Ejemplos:

- Sean $z_1 = 3(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)$ y $z_2 = 8(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$; entonces $z_1 z_2 = 24 (\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) = 24 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$$= 12\sqrt{2} + 12\sqrt{2}\, i$$

- Los números complejos $z_1 = 1 + \sqrt{3}\, i$ y $z_2 = 1 + i$, escritos en forma trigonométrica, son:

$z_1 = 2 (\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$ y $z_2 = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$

Entonces, su producto es

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos (60^\circ + 45^\circ) + i \operatorname{sen} (60^\circ + 45^\circ)\right) =$$

$$= 2\sqrt{2} (\cos 105^\circ + i \operatorname{sen} 105^\circ)$$

Ejercicios:

1. Considera los números complejos:

$z_1 = 3(\cos 18^\circ + i \operatorname{sen} 18^\circ)$

$z_2 = 10(\cos 10^\circ + i \operatorname{sen} 10^\circ)$

$z_3 = 32(\cos 75^\circ + i \operatorname{sen} 75^\circ)$

Calcula:

a) $z_1 z_2$

b) $(z_1 z_2) z_3$

c) $(z_1^2 z_2) z_3$

2. Escribe en forma polar los números complejos $z_1 = 5 + 5i$ y $z_2 = 3 + 3\sqrt{3}i$ y calcula su producto utilizando las formas binómica y polar.

3. Utiliza la forma polar para calcular el producto de un número complejo por i. Interpreta utilizando dicha forma polar el significado geométrico del producto por i.

2 Cociente de números complejos

Sean $z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) = \rho_{1_{\theta_1}}$ y $z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) = \rho_{2_{\theta_2}}$ dos números complejos con $z_2 \neq 0$.

Nos proponemos calcular el cociente $z = \frac{z_1}{z_2}$. Supongamos que $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$; vamos a calcular ρ y θ.

Si $z = \frac{z_1}{z_2}$, entonces $z_1 = z\, z_2$. Como en el apartado **1** hemos visto que: $z\, z_2 = \rho\rho_2 (\cos(\theta + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta_2))$ resulta que:

$$\rho_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) = \rho\rho_2 (\cos(\theta + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta_2)),$$

de donde $\begin{cases} \rho_1 = \rho\rho_2 \\ \theta_1 = \theta + \theta_2 \end{cases}$

y por tanto, $\rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ y $\theta = \theta_1 - \theta_2$, es decir, $\frac{\rho_{1_{\theta_1}}}{\rho_{2_{\theta_2}}} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)_{(\theta_1 - \theta_2)}$

Obtenemos así la siguiente regla: *El cociente de dos números complejos escrito en forma polar tiene por módulo el cociente de los módulos y por argumento la diferencia entre el argumento del dividendo y el del divisor.*

Ejemplo:

- Consideremos los siguientes números complejos:

  $z_1 = 10 (\cos 70^\circ + i \operatorname{sen} 70^\circ)$ y $z_2 = 5(\cos 43^\circ + i \operatorname{sen} 43^\circ)$; entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10}{5} (\cos(70 - 43) + i \operatorname{sen}(70 - 43)) =$$

$$= 2(\cos 27^\circ + i \operatorname{sen} 27^\circ) = 1'7820 + 0'9080\, i$$

4. Dados los siguientes complejos:

$z_1 = 6 (\cos 170^\circ + i \operatorname{sen} 170^\circ)$,

$z_2 = 2 (\cos 83^\circ + i \operatorname{sen} 83^\circ)$,

calcula $\frac{z_1}{z_2}$.

5. Escribe los números complejos $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 6 - i$ en forma polar y calcula $\frac{z_1}{z_2}$ en forma polar y binómica.

6. Expresa en forma trigonométrica el cociente $\frac{1}{\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta}$

Da una interpretación geométrica.

3 Potencia de un número complejo

Vamos a calcular la potencia de un número complejo en las formas polar y trigonométrica.

Sea $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$; aplicando la fórmula del apartado **1** para calcular el producto $z\, z = z^2$, se tiene:

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

Análogamente:

$$z^3 = z\, z^2 = \rho^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)$$

Demostremos por inducción que se verifica:

$$z^n = \rho^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

En efecto: Supongamos que la fórmula es cierta para $n-1$

$z^{n-1} = \rho^{n-1} (\cos (n-1)\theta + i \operatorname{sen} (n-1)\theta)$, entonces:

$$z^n = z\, z^{n-1} = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\rho^{n-1}(\cos(n-1)\theta + i \operatorname{sen}(n-1)\theta) =$$
$$= \rho^n [(\cos\theta \cos(n-1)\theta - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(n-1)\theta) +$$
$$+ i(\cos\theta \operatorname{sen}(n-1)\theta + \operatorname{sen}\theta \cos(n-1)\theta)] =$$
$$= \rho^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)], \text{ es decir: } (\rho_\theta)^n = \rho^n_{n\theta}$$

Esta fórmula se conoce con el nombre de *fórmula de Moivre*, y es evidente la simplificación que introduce en el cálculo de potencias de números complejos.

Ejemplos:

- Calculemos la potencia sexta del número complejo $z = 3 + 3i$.

  Para ello lo escribimos en forma trigonométrica:

  $$z = 3(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$$

  Entonces:

  $$z^6 = [3(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)]^6 = 3^6 (\cos(45^\circ \cdot 6) + i \operatorname{sen}(45^\circ \cdot 6)) =$$
  $$= 729(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ) = -729\, i.$$

- Vamos a calcular la potencia cuarta del número complejo $z = 4\sqrt{3} + 4i$, representado en la figura 1. El módulo de z es: $|z| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{48 + 16} = 8$.

  Como $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, resulta que el argumento α de z es $\alpha = 30^\circ$; entonces, la expresión trigonométrica de z es: $z = 8(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$.

  Aplicando la fórmula de Moivre, se tiene:
  $z^4 = [8(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)]^4 = 8^4(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$.

  Como $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -1/2$ y $\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, resulta: $z^4 = 8^4(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) = 4.096 \cdot (-1/2 + \sqrt{3/2}) =$
  $$= 2.048 + 2.048\sqrt{3}$$

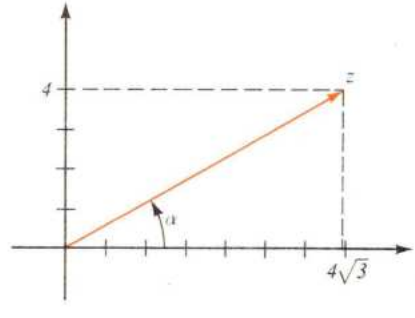
- Supongamos que queremos hallar z^8, donde $z = -2 + 2\sqrt{3}\, i$; entonces z, escrito en forma trigonométrica, viene expresado por $z = 4(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$, luego se tiene:

  $$z^8 = 4^8(\cos 960^\circ + i \operatorname{sen} 960^\circ)$$

  Como $\cos 960^\circ = \cos 240^\circ$ y $\operatorname{sen} 960^\circ = \operatorname{sen} 240$,

  pues $960 = 360 \cdot 2 + 240$, resulta:

  $$z^8 = 4^8(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = -32768 - 56688'64\, i$$



(Fig. 1)

• La fórmula de Moivre, combinada con el desarrollo del binomio de Newton, puede utilizarse para obtener fácilmente las razones trigonométricas (seno y coseno) del múltiplo de un ángulo θ, conociendo las razones trigonométricas de θ. El método a seguir es el siguiente:

Supongamos que queremos calcular sen 5θ conociendo sen θ y cos θ. La fórmula de Moivre nos dice que:

$\cos 5\theta + i \operatorname{sen} 5\theta = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^5$. (En este caso $\rho = 1$.)

Desarrollando por el binomio de Newton, resulta:

$$(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^5 = \binom{5}{0}\cos^5\theta + \binom{5}{1}\cos^4\theta\,(i\operatorname{sen}\theta) +$$

$$+ \binom{5}{2}\cos^3\theta\,(i\operatorname{sen}\theta)^2 + \binom{5}{3}\cos^2\theta\,(i\operatorname{sen}\theta)^3 +$$

$$+ \binom{5}{4}\cos\theta\,(i\operatorname{sen}\theta)^4 + \binom{5}{5}(i\operatorname{sen}\theta)^5 = \cos^5\theta +$$

$$+ 5i\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta - 10\cos^3\theta\operatorname{sen}^2\theta - 10i\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta +$$

$$+ 5\cos\theta\operatorname{sen}^4\theta + i\operatorname{sen}^5\theta = (\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\operatorname{sen}^2\theta +$$

$$+ 5\cos\theta\operatorname{sen}^4\theta) + i\,(5\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta - 10\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta + \operatorname{sen}^5\theta).$$

Igualando las partes reales e imaginarias, obtenemos:

$$\operatorname{sen} 5\theta = \operatorname{sen}^5\theta - 10\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta + 5\operatorname{sen}\theta\cos^4\theta$$

$$\cos 5\theta = 5\operatorname{sen}^4\theta\cos\theta - 10\operatorname{sen}^2\theta\cos^3\theta + \cos^5\theta$$

7. Calcula las siguientes potencias de números complejos:

a) $i^{16}, i^3, i^8, i^5, i^6, i^{18}, i^{3420}$

b) $(1-2i)^4$

c) $(2+2\sqrt{3})^8$

d) $\left[7\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)\right]^6$

8. Calcula sen3θ y cos 6θ en función de sen θ y cos θ.

9. Si sen $\alpha = \frac{3}{5}$, calcula sen 4α.

4 Raíces n-ésimas de un número complejo

4.1. Nos proponemos ahora encontrar las raíces n-ésimas de un número complejo $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

Se llama raíz n-ésima del número complejo z a todo número complejo ω tal que $\omega^n = z$.

Sea $\omega = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ una de sus raíces n-ésimas; entonces $\omega^n = z$; aplicando la fórmula de Moivre se tiene:

$$\rho\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = r^n\,(\cos n\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$$

Como estos dos complejos son iguales, deberán tener iguales los módulos, diferenciándose los argumentos en un múltiplo de 2π; luego: $r^n = \rho$ y $n\alpha = \theta + 2k\pi$

de donde:

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Observa que k toma los valores 0, 1, 2, ... $n-1$. Para $k=n$ resulta la misma raíz que para $k=0$, para $k=n+1$ la misma que para $k=1$, etc..., ya que los valores de los ángulos correspondientes difieren en un múltiplo de 2π.

Por tanto, *un número complejo tiene n raíces n-ésimas;* en particular un número real tendrá n raíces n-ésimas, de las que algunas serán reales y otras complejas.

Ejemplos:

- Vamos a calcular las raíces cuartas de i. El módulo de i es 1 y su argumento $\frac{\pi}{2}$; el módulo de las raíces cuartas será entonces $r=\sqrt[4]{1}=1$ y el argumento será:

$$\alpha=\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k=0,1,2,3$$

Es decir, las raíces cuartas de i serán:

$$\omega_1=1\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)=$$

$$=\cos\frac{\pi}{8}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{8}=0'9239+0'3827\,i$$

$$\omega_2=1\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{8}\right)=$$

$$=\cos\frac{5\pi}{8}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{8}=-0'3827+0'9239i$$

$$\omega_3=\cos\frac{9\pi}{8}+i\,\text{sen}\,\frac{9\pi}{8}=-0'9239-0'3827\,i$$

$$\omega_4=\cos\frac{13\pi}{8}+i\,\text{sen}\,\frac{13\pi}{8}=0'3827-0'9239\,i$$

- Vamos a hallar las raíces cuadradas de $z=2\sqrt{3}-2i$.

Para ello escribimos z en forma trigonométrica:

$z=4(\cos 30^\circ+i\,\text{sen}\,30^\circ)$.

El módulo de las raíces cuadradas será $\sqrt{4}=2$ y el argumento $\alpha=\frac{30^\circ+360^\circ k}{2}=15+180^\circ k$, $(k=0,1)$; por tanto, las raíces cuadradas de z serán:

$$\omega_1=2(\cos 15^\circ+i\,\text{sen}\,15^\circ)=2(0'9659+0'2588\,i)=$$

$$=1'9318+0'5176\,i$$

$$\omega_2=2[\cos(15^\circ+180^\circ)+i\,\text{sen}\,(15^\circ+180^\circ)]=$$

$$2(-\cos 15^\circ-i\,\text{sen}\,15^\circ)=-1'9318-0'5176\,i.$$

10. Halla las raíces cúbicas de los siguientes números complejos:

$-i$, $2+i$, $-3+3i$, -27

11. Halla las raíces quintas de los números complejos:

a) $32\left(\cos\frac{\pi}{10}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{10}\right)$

b) $-6+6i$

c) $-27i$

12. Resuelve la ecuación $z^4-27z=0$

• Vamos ahora a calcular las raíces cúbicas del número real 8.

El número real 8 puede considerarse como un número complejo de módulo 8 y argumento 0 (Fig. 2), luego el módulo y el argumento de sus raíces cúbicas es:

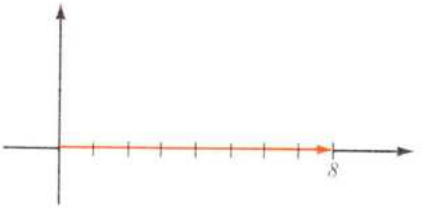
$$\begin{cases} \rho = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \alpha = \dfrac{2k\pi}{3} \quad , \quad k = 0, 1, 2 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\omega_1 = 2(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ) = 2$$

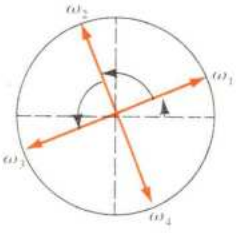
$$\omega_2 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \sqrt{3}\, i$$

$$\omega_3 = 2\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}\right) = -1 - \sqrt{3}\, i$$



(Fig. 2)

4.2. Hemos visto que las raíces n-ésimas de un complejo $z = \rho\ (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ tienen todas el mismo módulo, que es precisamente $r = \sqrt[n]{\rho}$; de aquí que los afijos de las n raíces n-ésimas de z se encuentren sobre la circunferencia de radio $r = \sqrt[n]{\rho}$ y centro el origen de coordenadas.



(Fig. 3)

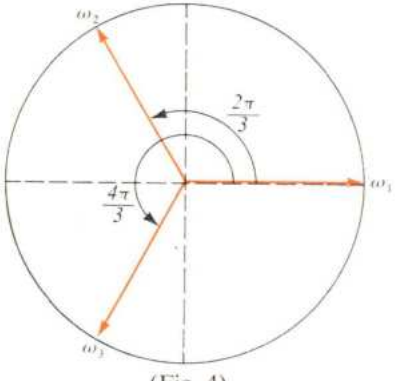
Ejemplo:

• En la figura 3 aparecen representadas las raíces cuartas de i, estudiadas en el primer ejemplo de **4.1.**

$$\omega_1 = 1_{\frac{\pi}{8}}, \quad \omega_2 = 1_{\frac{5\pi}{8}}, \quad \omega_3 = 1_{\frac{9\pi}{8}}, \quad \omega_4 = 1_{\frac{13\pi}{8}}$$

• En la figura 4 aparecen representadas las tres raíces cúbicas de 8.

$$\omega_1 = 2_{0^\circ}, \quad \omega_2 = 2_{\frac{2\pi}{3}}, \quad \omega_3 = 2_{\frac{4\pi}{3}}$$



(Fig. 4)

13. Calcula y representa gráficamente las raíces siguientes:

a) $\sqrt[4]{i}$

b) $\sqrt[3]{3 + 3\sqrt{3}\, i}$

c) $\sqrt{-i}$

d) $\sqrt[4]{-16}$

Ejercicios y cuestiones

14. Escribe en forma polar los siguientes números complejos:
$z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = 8 + 2i$ y calcula $z_1\, z_2\, z_3^2$ y $z_1\, z_3$

15. Calcula los siguientes cocientes: $\frac{z_1}{z_3^2}$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_1 z_3}{z_2}$, donde z_1, z_2 y z_3 son los complejos del ejercicio **14.** (Utiliza la forma polar.)

16. Calcula las siguientes potencias, utilizando la forma polar: $(3 + 3i)^8$, $(1-i)^{14}$, $(2-2\sqrt{3}i)^6$

17. Halla las raíces cúbicas de -1 y represéntalas gráficamente.

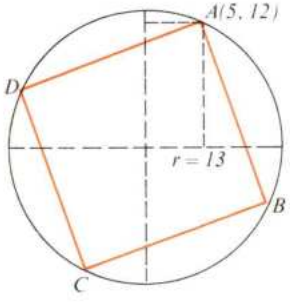
18. Calcula: $\sqrt[3]{2 + 2i}$ $\sqrt[4]{1 - i}$ $\sqrt[5]{3 + 3i}$ $\sqrt[3]{-216}$ $\sqrt[4]{16}$

19. Representa gráficamente las raíces obtenidas en el ejercicio anterior.

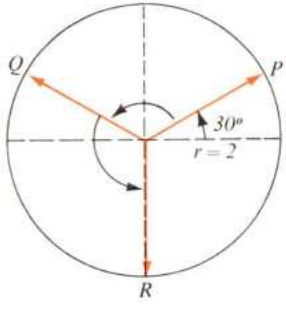
20. Resuelve la ecuación $z^5 + 64\, z^2 = 0$ en el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos.

21. Sabemos que el radio de la circunferencia de la figura vale 13.

Halla los vértices del cuadrado inscrito.



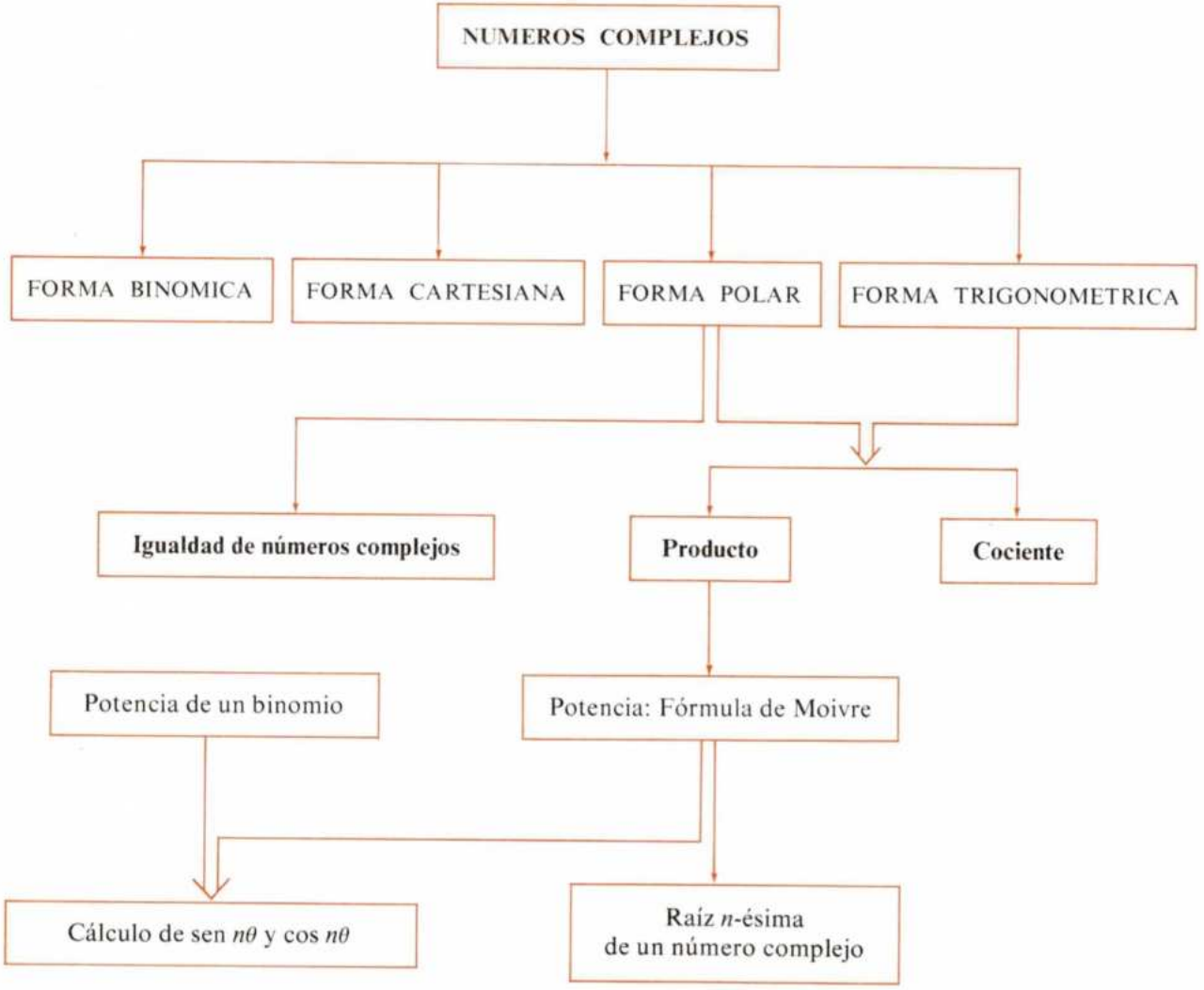
22. Sabiendo que los puntos P, Q y R son los afijos de las raíces cúbicas de un número complejo, halla las coordenadas de los puntos Q y R, así como dicho número complejo.



23. Prueba que los argumentos de las raíces n-ésimas de un número complejo z están en progresión aritmética.

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD 4

NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR



Unidad 5

CALCULO DIFERENCIAL

En esta Unidad y en la siguiente vas a iniciar el estudio de una de las ramas más importantes de la Matemática: el cálculo infinitesimal. Dos son los problemas que conducen a esta rama: por una parte, el problema de hallar la tangente a una curva en uno de sus puntos; por otra, el cálculo del área determinada por curvas.

El primer problema conduce al estudio del cálculo diferencial, objeto de esta Unidad; el segundo, al estudio del cálculo integral, que estudiarás en la Unidad 6.

El concepto básico para abordar el primero de estos problemas es el de derivada de una función; este concepto es fundamental en numerosas ramas de la Matemática, Física, Economía, etc., y nos será también útil para el estudio del comportamiento de una función en uno de sus puntos, resolviendo problemas como son el cálculo de los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de una función.

Tema 13

1. El problema de la tangente a una curva en uno de sus puntos.
2. El concepto de derivada.
3. Funciones no derivables.
4. Función derivada.
5. Algunos ejemplos de funciones derivables.
6. Diferencial de una aplicación.
7. Derivadas sucesivas.
8. Derivada de una suma de funciones.
9. Derivada del producto de una función por un número real.
10. Derivada de la función polinómica.
11. Derivada de un producto de funciones.
12. Derivada de un cociente de funciones.
13. Derivada de una composición de funciones: Regla de la cadena.
14. Derivada de la función recíproca.

Tema 14

1. Derivada de la función potencial de exponente negativo.
2. Derivada de la función logarítmica.
3. La derivación logarítmica.
4. Derivada de la función exponencial.
5. Derivada de las funciones trigonométricas.
6. Derivadas de las funciones trigonométricas recíprocas.

Tema 15

1. Crecimiento y decrecimiento de una función.
2. Máximos y mínimos de una función.
3. Problemas relativos a máximos y mínimos.
4. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

Tema 16

1. Intervalos de existencia y regiones.
2. Cortes a los ejes.
3. Intervalos de crecimiento. Máximos y mínimos.
4. Intervalos de convexidad y concavidad. Puntos de inflexión.
5. Reducción del dominio de una función.
6. Asíntotas.
7. Regiones.
8. Representación gráfica de una función.

Tema 17

1. Ecuación de la tangente a una curva.
2. Ecuación de la tangente a una circunferencia en uno de sus puntos.
3. Ecuación de las tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a ella.
4. Ecuación de la tangente a la elipse y a la hipérbola.
5. Ecuación de la tangente a la parábola.

Tema 13

EL CONCEPTO DE DERIVADA. CALCULO CON DERIVADAS

Este tema está dedicado fundamentalmente a dos cuestiones: por una parte, a introducir el concepto central de derivada de una función; por la otra, a estudiar el comportamiento del proceso de obtener la derivada de una función respecto a las principales operaciones con funciones (suma, producto, cociente, composición y función recíproca).

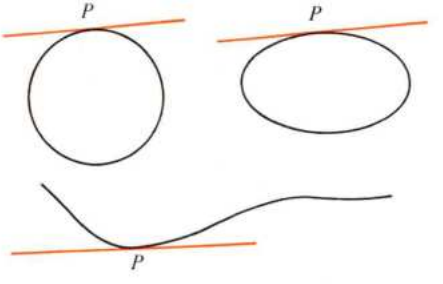
Respecto a la introducción de la derivada, hemos seguido el camino más intuitivo, es decir, el presentarla como solución del problema del cálculo de la tangente a una curva, por la clara presentación geométrica del problema.

Ante la imposibilidad de presentar de forma rigurosa cuestiones tales como la Regla de la cadena o la derivada de la función recíproca, damos una justificación informal de las mismas, cargando el acento en la aplicación práctica de dichas reglas.

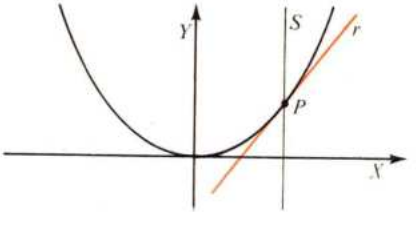
1 El problema de la tangente a una curva en uno de sus puntos

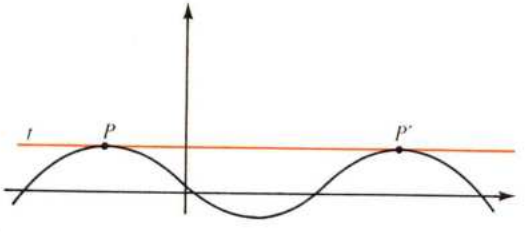
1.1. Uno de los problemas que da origen al estudio del cálculo diferencial es el de la determinación de la tangente a una curva en uno de sus puntos.

Aunque el concepto de recta tangente es bastante intuitivo, cuando se trata de precisar formalmente surgen dificultades; por ejemplo, en una primera aproximación podríamos definir la tangente a una curva en uno de sus puntos, P, como una recta que pasando por P cortase a dicha curva solamente en el punto P. En casos como los de la figura 1, parece que esta definición puede ser buena.



(Fig. 1)





(Fig. 2)

Si consideramos las curvas de la figura 2, en la primera de ellas las dos rectas, r y s, cumplen la propiedad de cortar a la curva solamente en un punto P, y, no obstante, así como la recta r puede acomodarse a nuestro concepto intuitivo de tangente, no sucede así con s.

Por otra parte, en la segunda curva de la figura 2, la recta t responde a nuestro concepto intuitivo de tangente y, sin embargo, tiene dos puntos en común con la curva: P y P'.

1.2. Una forma de llegar a expresar de manera formal el concepto de tangente es la de considerar la tangente como *límite* de secantes a la curva que pasan por P.

Consideremos, en un sistema de ejes cartesianos rectangulares, la curva correspondiente a la gráfica de la función continua $y = f(x)$, como se indica en la figura 3.

Sea P_1 un punto de dicha curva distinto de P y sean (x_0, y_0) y (x_1, y_1) las coordenadas de P y P_1, respectivamente.

La ecuación de la recta secante que pasa por P y P_1 es

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0), \text{ cuya pendiente es } m_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

¿Qué sucede cuando el punto P_1 se mueve sobre la curva aproximándose a P?

La figura 4 nos ilustra esta situación y nos muestra cómo las sucesivas secantes PP_1, PP_2, ... , PP_n se van aproximando cada vez más a la tangente en el punto P según nuestro concepto intuitivo de tangente.

Si las coordenadas de P_n son (x_n, y_n), la pendiente de la secante PP_n es

$$m_n = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}$$

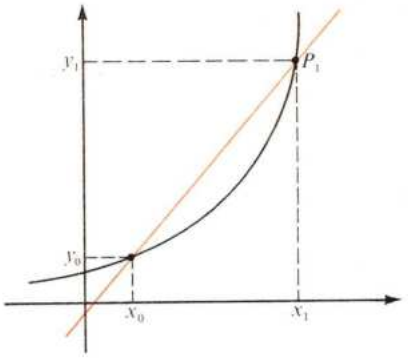
Parece, pues, lógico definir la tangente a la curva $y = f(x)$ en $P = (x_0, y_0)$ como la recta que pasa por P y cuya pendiente es el límite de las pendientes que pasan por P y por un punto variable P_n cuando P_n se aproxima a P.

Vamos a precisar más: ¿Qué significa que P_n se aproxima a P?

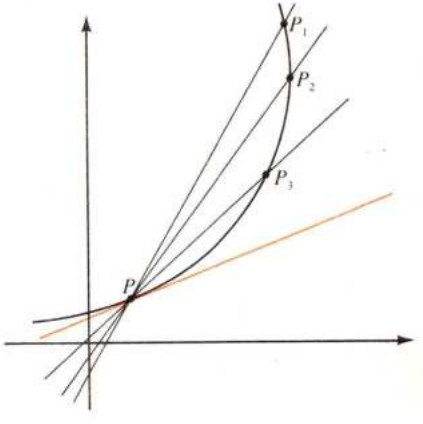
En la figura 5 vemos que si P_n es un punto de la curva, P_n tiene de abscisa $x_n = x_0 + h$ para un h conveniente (concretamente, $h = x_n - x_0$); además, si $P_n \neq P$, entonces $h \neq 0$, luego decir que P_n se aproxima a P significa que h tiende a cero, o, lo que es lo mismo, toma valores próximos a cero, ya que la función f se ha supuesto continua.

Por tanto, la pendiente de la tangente a $y = f(x)$ en $P_0 = (x_0, y_0)$ será:

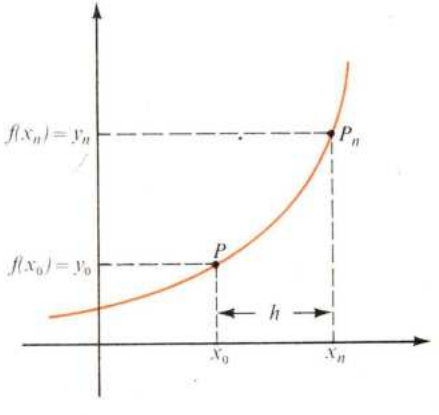
$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y_0}{h}, \text{ donde } \Delta y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0)$$



(Fig. 3)



(Fig. 4)



(Fig. 5)

1.3. De lo anteriormente dicho se deduce que la tangente a $y = f(x)$ en $P = (x_0, y_0)$ tiene por ecuación: $y - y_0 = m(x - x_0)$, donde $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Ejemplos:

- Consideremos la curva $y = f(x) = x^2$; entonces, la pendiente de la tangente en $P = (2,4)$ será:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^2 - 4}{h} = 4$$

- Sea ahora la curva $y = 3x^2 - 8x + 2$. ¿En qué punto la pendiente de la tangente valdrá 4?

  Sea $P = (x_0, y_0)$ dicho punto; entonces:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{[3(x_0 + h)^2 - 8(x_0 + h) + 2] - (3x_0^2 - 8x_0 + 2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 6x_0 h - 8h}{h} = 6x_0 - 8$$

  Como $m = 4$, deberá ser $6x_0 - 8 = 4$; luego $x_0 = 2$, y, por tanto, $y_0 = 3 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 2 = -2$, por lo que el punto será $P = (2, -2)$.

Ejercicios:

1. Halla la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x) = x^3 - 1$ en $(0, -1)$.

2. Determina la pendiente de la tangente a la curva $y = x^2 - 6x + 8$ en el punto de abscisa $x_0 = 1$.

3. ¿Cuál es la ecuación de la tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$ en $(-1, -1)$?

4. ¿En qué puntos de la curva $y = 2x^3 + 4x$ la pendiente de la tangente vale 10?

5. ¿Tiene la curva $y = x^3 - 12x$ algún punto en el que su tangente sea paralela al eje OX? En caso afirmativo, halla la ecuación de la tangente en dicho punto.

2 El concepto de derivada

En el apartado anterior hemos visto el interés del cálculo de la expresión $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Este límite aparece con mucha frecuencia en problemas de Matemática, Física, Química, etc., y por ello es conveniente darle un nombre y estudiarlo con detalle.

Su estudio es una de las partes fundamentales del llamado cálculo infinitesimal.

2.1. Sea $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in]a, b[$.
Se dice que *f es derivable en x_0* si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Si f es derivable en x_0, este límite se escribe $f'(x_0)$ y se llama la *derivada de f en x_0*;

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y_0}{h}$$

Ejemplos:

- Sea $f:]0,2[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{-2}{x}$; entonces:

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2}{1+h} - \frac{-2}{1}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h(1+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{1+h} = 2$$

luego f es derivable en $x_0 = 1$, y su derivada es 2.

- Sea $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x^2 + 5$; se tiene:

$$g'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[2(2+h)^2 + 5] - 13}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8h + 2h^2}{h} = 8$$

luego g es derivable en $x_0 = 2$, y su derivada, 8.

2.2. Una función $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ se dice *derivable en* $]a, b[$ si f es derivable en todo punto $x_0 \in]a, b[$, lo que quiere decir que $\forall\ x_0 \in]a, b[$, existe $f'(x_0)$.

Ejemplo:

- Sea $f:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$; si $x_0 \in]0, \infty[$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x_0+h)x_0} =$$

$= -\dfrac{1}{x_0^2}$, es decir, que para todo $x_0 \in]0, \infty[$, f es derivable en x_0, luego f es derivable en $]0, \infty[$.

6. Halla la derivada en $x_0 = 6$ de $f:]1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{3}{1-x}$

7. Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^2 - 1$. ¿Existe algún punto x_0 tal que $f'(x_0) = 0$?

8. Demuestra que la función afín $y = ax + b$ es derivable en cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$ y que su derivada no depende de x_0.

9. La función $f:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ¿es derivable en $]0, \infty[$?

10. Halla en $x_0 = 2$ las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3/x^3$

b) $g:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$

c) $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^3 + 4x$

11. Las funciones f, g y h del ejercicio anterior, ¿son derivables en $]3,5[$?

3 Funciones no derivables

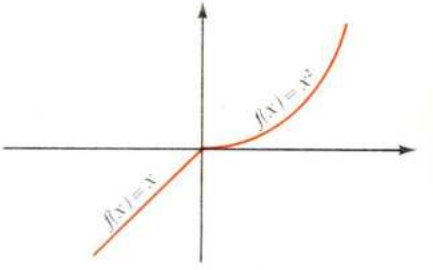
3.1. Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

cuya gráfica está representada en la figura 6.

Tratemos de ver si f es derivable en $x_0 = 0$; para ello tenemos que ver si existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}$$



(Fig. 6)

Ahora bien:

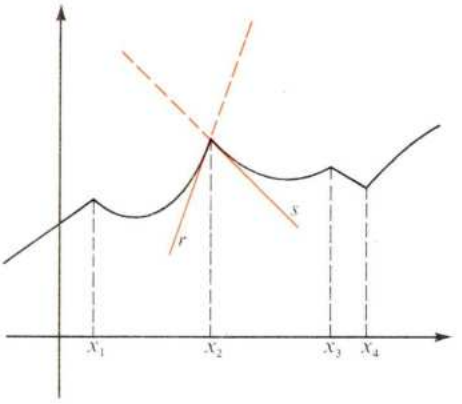
El límite por la derecha de $\frac{f(h)}{h}$ es $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h^2}{h} =$

$= \lim_{h\to 0^+} h = 0$

El límite por la izquierda de $\frac{f(h)}{h}$ es $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{h}{h} = 1$

Como ambos límites laterales son distintos, *no* existe $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$ (ver 2.º B.U.P. **Santillana**) y, por tanto, *f no* es derivable en $x_0 = 0$.

Lo anterior nos demuestra que existen funciones que no son derivables en algún punto de su dominio. En general, si una función tiene una gráfica como la de la figura 7, la función no será derivable en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ correspondientes a los ángulos de su gráfica.



(Fig. 7)

Observa que en estos puntos no se puede hablar de tangente a la gráfica, pues si bien la recta *r* puede considerarse tangente a la curva de la figura 7 en x_2 para la parte de la curva situada a la izquierda de x_2, a la derecha de x_2 parece más lógico considerar como tangente a la recta *s*.

La anterior observación conduce a establecer las siguientes definiciones:

3.2. Sea $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in]a,b[$; se dice que *f es derivable en x_0 por la derecha* si existe:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad [1]$$

y que *f es derivable en x_0 por la izquierda* si existe:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad [2]$$

Los límites [1] y [2] se llaman las *derivadas laterales de f en x_0*.

El límite [1] es la *derivada lateral por la derecha de f en x_0*, y se escribe $f'_+(x_0)$, y el límite [2] es la *derivada lateral por la izquierda de f* en x_0, y se escribe $f'_-(x_0)$.

Entonces, tenemos que:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

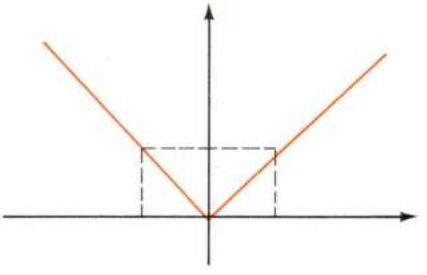
$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ejemplo:

- Consideremos la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, es decir,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

cuya gráfica es la de la figura 8.



(Fig. 8)

Entonces:

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

3.3. Recordando (ver 2.º B.U.P. **Santillana**) que el límite en x_0 de una función existe si, y sólo si, existen los límites en x_0 por la derecha y por la izquierda y coinciden, se tiene:

f es derivable en x_0 si, y sólo si, existen $f'(x_0)$ y $f'(x_0)$ y ambos valores son iguales; en este caso:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

12. Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - 2|$. ¿Es f derivable en $x_0 = 1$? ¿Y en $x_0 = 2$?

13. Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 4$. Calcula $f'_-(0)$ y $f'_+(0)$.

A la vista de estos resultados, ¿es f derivable en $x_0 = 0$?

14. Sea $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Calcula $g'_+(0)$ y $g'_-(0)$. ¿Es g derivable en $x_0 = 0$?

15. Dada la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Calcula $f'_+(0)$ y $f'_-(0)$ ¿Existe $f'(0)$?

16. Sea la función $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x + 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

¿Es g derivable en $x_0 = 0$?

17. Halla las derivadas laterales de $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x + 6|$ en $x_0 = -6$ y en $x_0 = 0$.

4 Función derivada

Sea $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $]a,b[$. Sabemos que para todo $x \in]a,b[$ existe $f'(x)$. Podemos entonces definir una función $Df:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ que haga corresponder a cada $x \in]a,b[$ su derivada $f'(x)$. Esta función es la *función derivada de f.*

$$\begin{aligned} Df:]a,b[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow (Df)(x) = f'(x) \end{aligned}$$

Nota: Si utilizamos la notación $y = f(x)$, es frecuente y cómodo utilizar para la función derivada la notación $y' = f'(x)$.

En este caso, si $x_0 \in]a,b[$, entonces $(Df)(x_0)$ se escribe y'_{x_0} o $y'(x_0)$.

Otra notación para la derivada de la función $y = f(x)$, usada con frecuencia, es la debida a Leibnitz, que se escribe $Df = \frac{df}{dx}$ o $\frac{dy}{dx}$

En este caso, $(Df)(x_0)$ se escribe $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$ o $\left(\frac{dy}{dx}\right)x_0$

Esta notación, muy manejable, presenta, sin embargo, el inconveniente de que puede confundirse con un cociente.

Conviene insistir en que $\frac{df}{dx}$ *no es un cociente,* sino una notación para la función que asocia a cada $x_0 \in]a,b[$ la derivada de f en x_0.

Ejemplos:

- Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^2 + 2$.

  Veamos que f es derivable en $\mathbb{R}$. Sea x un punto de $\mathbb{R}$

  $$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[3(x+h) + 2^2] - (3x^2 + 2)}{h} =$$

  $$= \lim_{h\to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (6x + 3h) = 6x$$

  Resulta entonces que f es derivable en $\mathbb{R}$ y para cada $x \in \mathbb{R}$ la derivada es $f'(x) = 6x$; luego la función derivada es:

  $$Df: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
  $$x \longrightarrow (Df)(x) = 6x \quad \text{o} \quad y' = 6x$$

- Consideremos la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2x - 5$. Veamos que f es derivable en $\mathbb{R}$.

  Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces:

  $$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[2(x+h) - 5] - (2x - 5)}{h} =$$

  $$= \lim_{h\to 0} \frac{2x + 2h - 5 - 2x + 5}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

  Por tanto, f es derivable en $\mathbb{R}$ y para cada $x \in \mathbb{R}$ la derivada es $f'(x) = 2$, luego la función derivada es:

  $$Df: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
  $$x \longrightarrow (Df)(x) = 2 \quad \text{ó} \quad y' = 2$$

18. ¿Es derivable en $\mathbb{R}$ la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6x^2 + 4x - 1$? En caso afirmativo, halla su función derivada Df.

19. Se considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - 3|$. ¿Es f derivable en $\mathbb{R}$? ¿Y en $]4, \infty[$? Halla, en el caso de que f sea derivable, su función derivada.

20. Halla la función derivada de $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 1$. Exprésala en las diversas notaciones y calcula el valor de dicha función derivada en $x_0 = 1$.

5 Algunos ejemplos de funciones derivables

5.1. Sea $c \in \mathbb{R}$; la función constante f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = c$, es derivable en $\mathbb{R}$, y su función derivada es Df: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $(Df)(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

En efecto: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{c - c}{h} = 0$; luego f es derivable en todo $\mathbb{R}$, y como $f'(x) = 0$, $\forall\, x$, se tiene que:

Df: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por $(Df)(x) = f'(x) = 0$

5.2. La función 1: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $1(x) = x$, es decir, $y = x$ *(función identidad)* es derivable en $\mathbb{R}$ y su función derivada $(D\,1)(x) = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

En efecto: sea $x \in \mathbb{R}$

$$1'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1(x+h) - 1(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1,$$

luego 1 es derivable en $\mathbb{R}$, y se tiene $(D1)$: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(D\,1)(x) = 1'(x) = 1$.

5.3. Sea n un número natural; la función $f(x) = x^n$ es derivable en $\mathbb{R}$ y su función derivada es Df: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $(Df)(x) = nx^{n-1}$

Se tiene $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$

Recordando la fórmula del binomio de Newton:

$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n$, se tiene:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \ldots + h^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots + h^{n-1} \right] = \binom{n}{1} x^{n-1} = nx^{n-1}$$

luego f es derivable en $\mathbb{R}$, y $(Df)(x) = nx^{n-1}$

Ejemplos:

- Sea $y = f(x) = x^6$; entonces, $y' = 6x^5$.
- Sea $y = x^9$; entonces, $y' = 9x^8$. En notación de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = 9x^8.$$

6 Diferencial de una aplicación

6.1. Con frecuencia, queremos hallar el valor de una función continua dada f en un punto $a + h$, en que $f(a + h)$ es difícil de calcular. Si se conocen $f(a)$ y $f'(a)$, donde $a + h$ es un punto próximo a a, vamos a ver que se puede obtener un valor aproximado de $f(a + h)$ cuando h es pequeño.

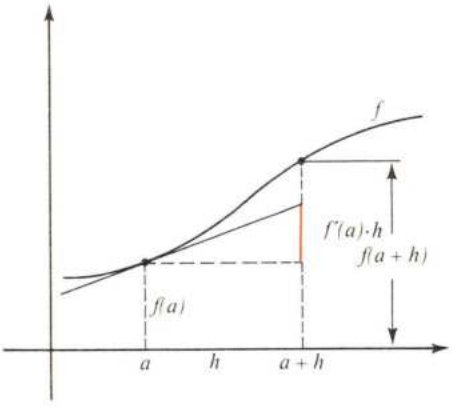
En efecto: como $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, resulta que el cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ es aproximadamente igual a $f'(a)$ cuando h es pequeño, o, lo que es lo mismo, el numerador de la fracción anterior es aproximadamente igual a $f'(a) \cdot h$, es decir:

$$f(a + h) - f(a) \approx f'(a) \cdot h \quad \text{o} \quad f(a + h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h \qquad [1]$$

El error que se comete al calcular $f(a + h)$ por la fórmula [1] es tanto más pequeño cuanto menor sea h.

En la figura 9 se han señalado los términos de la fórmula anterior, y se observa que lo que se hace en la relación [1] es aproximar la gráfica de la función dada $y = f(x)$ cerca de $x = a$ mediante la gráfica de la tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$

En otras palabras: como la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ es $y = f(a) + f'(a) \cdot h$, al tomar $f(a) + f'(a) \cdot h$ como valor de $f(a + h)$ lo que hacemos es sustituir la función f por su tangente en $(a, f(a))$.



(Fig. 9)

6.2. El término $f'(a) \cdot h$ de la relación [1] de **6.1.** se denomina diferencial de f en a con incremento h y se designa por $df_a(h)$, es decir: $df_a(h) = f'(a) \cdot h$.

Se tiene así que la diferencial de una función en un punto $x = a$ es una función lineal

$$\begin{aligned} df_a: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longrightarrow f'(a) \cdot h \end{aligned}$$

que asocia a cada incremento h de la variable x el producto $f'(a) \cdot h$.

Así, a cada punto a en que f tenga derivada queda asociada una función lineal que es la diferencial de f en ese punto.

Nota: La diferencial de f en x la hemos designado por $df_x(h)$, pero en la notación tradicional se omiten la x y la h y se escribe df, o, simplemente, dy cuando se utiliza la notación $y = f(x)$.

Análogamente, se usa en lugar de h el símbolo dx, con lo cual se escribe $df = f'(x)dx$ o $dy = f'(x)dx$.

Así, en la función $y = f(x) = 3x^2 + 4x$

$$df = dy = (6x + 4)dx$$

Esta fórmula significa que para cada x existe una función lineal $(6x + 4)dx$, en la que $6x + 4$ es fija y dx es una variable real.

Al omitirse la x en la notación tradicional, no queda claro que la función lineal df depende de la elección de x.

Ejemplos:

- Sea la función $f(x) = \frac{1}{x^3}$; la función derivada es: $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$.

  Los valores de la función y de la derivada en el punto $x = 1$ son, respectivamente, $f(1) = 1$ y $f'(1) = -3$.

  Entonces, $f(1 + h) \simeq f(1) + f'(1)\,h = 1 - 3h$ [2]

- Si queremos obtener un valor aproximado de $f(1 + 0{,}005) = \frac{1}{(1 + 0{,}005)^3}$, ponemos $f(1 + 0{,}005) = 1 - 3h = 1 - 0{,}015 = 0{,}985$.

21. Aplicando la notación $dy = f'(x)dx$, calcula la diferencial de las funciones

a) $y = x^2 - 6x - 8$

b) $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

22. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^5}$, calcula el valor aproximado de $\frac{1}{(1{,}024)^5}$

(Indicación: Aplica la relación

$$f(1 + 0{,}004) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0{,}004)$$

23. Calcula el valor aproximado de $4(1{,}0032)^5 - 2(1{,}0032)^3$

Indicación: Considera la función $f(x) = 4x^5 - 2x^3$. Calcula después $f(1)$ y $f'(1)$ y aplica la relación

$$f(1{,}0032) \approx f(1) + f'(1) \cdot 0{,}0032$$

7 Derivadas sucesivas

Sea $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $]a, b[$; entonces hemos visto que podíamos definir la función derivada de f como la función $Df =]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $(Df)(x) = f'(x)$.

Si esta función Df es a su vez derivable en $]a, b[$, entonces podemos definir su función derivada $D(Df)$: $]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, que suele representarse por D^2f o f'' y se llama la *derivada segunda de f*.

Análogamente, podemos definir D^3f, D^4f, etc.

Ejemplo:

- Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 2x^2$; entonces es un sencillo ejercicio demostrar que $Df: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $(Df)(x) = f'(x) = 3x^2 + 4x$. Es fácil ver que esta función $g(x) = 3x^2 + 4x$ es derivable en $\mathbb{R}$ y $(Dg)(x) = 6x + 4$.

  Luego: $(D^2f)(x) = D(Df(x)) = (Dg)(x) = 6x + 4$.

24. Demuestra que $y = x^3 + 2x^2$ es derivable en $\mathbb{R}$ y que $y' = 3x^2 + 4x$.

25. Demuestra que $y = 3x^2 + 4x$ es derivable en $\mathbb{R}$ y que $y' = 6x + 4$.

26. Utilizando los resultados de los ejercicios **24** y **25**, calcula la derivada tercera de $y = x^3 + 2x^2$.

27. Halla las derivadas segunda y tercera de $y = \frac{1}{x}$ en $]0, \infty[$.

8 Derivada de una suma de funciones

8.1. Si $f,\ g\colon]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones derivables en $]a,b[$, $f+g$ es derivable en $]a,b[$ y $(f+g)'(x) = (f')(x) + (g')(x)$

En efecto, sea $x \in]a,b[$; se tiene:

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

Resulta entonces que $\forall\ x \in]a,b[$ existe $(f+g)'(x)$ y vale $f'(x) + g'(x)$, luego $f+g$ es derivable en $]a,b[$ y $D(f+g)(x) = (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = (Df)(x) + (Dg)(x)$.

Ejemplo:

- Sean $f,\ g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3 - 4x^2$ y $g(x) = 3x^2 + 7$; entonces, f y g son derivables en $\mathbb{R}$, y se tiene:

$$f'(x) = 3x^2 - 8x \quad \text{y} \quad g'(x) = 6x, \text{ luego}$$

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 3x^2 - 8x + 6x = 3x^2 - 2x$$

8.2. Si $f,\ g,\ h$ son tres funciones derivables en $]a,b[$, entonces

$$(f+g+h)'(x) = [(f+g)+h]'(x) =$$

$$(f+g)'(x) + h'(x) = f'(x) + g'(x) + h'(x)$$

Se puede probar por inducción que esta propiedad se verifica para un número n cualquiera de funciones, es decir:

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x)$$

28. Demuestra que si f y g son funciones derivables en $]a,b[$, entonces $f-g$ es derivable de $]a,b[$, y se verifica:

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

9 Derivada del producto de una función por un número real

Sean $f\colon]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $]a,b[$ y c un número real arbitrario; entonces cf es derivable en $]a,b[$ y se verifica $(c\cdot f)' = c\cdot f'$. En efecto: para todo $x \in]a,b[$,

$$(cf)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(cf)(x+h)-(cf)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{c[f(x+h)-f(x)]}{h} = c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = cf'(x);$$ entonces cf tiene derivada en todo punto x de $]a,b[$, luego cf es derivable en $]a,b[$ y $(cf)'(x) = cf'(x)$.

Ejemplo:

- Sea f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$; entonces, f es derivable en $\mathbb{R}$, y se tiene $f'(x) = 3x^2$. La función $5f$: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $(5f)(x) = 5x^3$, es derivable en $\mathbb{R}$, y se tiene:

$$(5f)'(x) = 5 \cdot f'(x) = 5 \cdot (3x^2) = 15x^2$$

- La función derivada de $y = 6x^2$ es

$$y' = (6x^2)' = 6(x^2)' = 6 \cdot 2x = 12x$$

29. Halla la derivada de f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^2 - 6$ y, como consecuencia, las de las funciones $-3f$, $5f$, $\sqrt{2} \cdot f$.

30. Demuestra que si f y g son derivables en $]a,b[$ y c, d dos números reales, entonces $cf + dg$ es derivable en $]a,b[$, y se tiene: $(cf + dg)(x) = cf'(x) + dg'(x)$.

10 Derivada de la función polinómica

10.1. Sea $c \in \mathbb{R}$; la función $y = cx^n$ es derivable en $\mathbb{R}$, y se tiene: $y' = cnx^{n-1}$

En efecto: sea $z = x^n$; entonces, $y = cz$. Recordando la derivada del producto de una función por un número real, expuesta en el apartado **9**, se tiene:

$$y' = (cz)' = cz' = cnx^{n-1}$$

ya que la derivada de $z = x^n$ está calculada en **5.3.** y vale nx^{n-1}

10.2. La función polinómica $y = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es $y' = a_1 + \ldots + na_nx^{n-1}$

Esto es consecuencia de **10.1.** y del hecho de que la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de cada uno de los sumandos.

Ejemplos:

- Si $y = 3 + 5x^2 - 4x^3$, entonces $y' = 10x - 12x^2$
- Si $y = 5x^2 - 6x + 16x^4$, entonces $y' = 10x - 6 + 64x^3$
- Si $y = 3x^3 + 2x - 1$, se tiene:
  $y = 9x^2 + 2$, $y'' = 18x$, $y''' = 18$, $y'''' = 0$
- Consideremos la función polinómica
  $f(x) = y = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 1$.

  Vamos a calcular su derivada en el punto $x = -1$.

  La función derivada es $f'(x) = y' = 6x^2 - 8x - 5$,
  luego $f'(1) = 6 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) - 5 = 6 + 8 - 5 = 9$.

31. Halla las derivadas de las siguientes funciones polinómicas:

a) $y = 2x$

b) $y = 3x^2 - 5x$

c) $y = 4x^3 + 8$

d) $y = 15x^6 - 13x^2 + 6x + 2$

32. Halla la ecuación de la tangente a las curvas de ecuación:

a) $y = 3x^2 + 8$ en el punto $(0,8)$

b) $y = 6x^3 - 4x^2 + 3$ en el punto $(1,5)$

c) $y = 2x^5 + 4$ en el punto $(-1,2)$

11 Derivada de un producto de funciones

11.1. Sean $f, g:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables en $]a, b[$; entonces, la función producto fg es derivable en $]a, b[$, y

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

En efecto, teniendo en cuenta que f y g son funciones continuas, para todo $x \in]a, b[$ se tiene:

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x+h)\,g(x) + f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,[g(x+h) - g(x)] + [f(x+h) - f(x)]\,g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\,\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,g(x) =$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} +$$

$$+ \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) \cdot g(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Ejemplos:

- Sea $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = (2x + 3)(5x^2 + 4)$; entonces, $h = f \cdot g$, donde f está definida por $f(x) = 2x + 3$ y g por $g(x) = 5x^2 + 4$. Como $f'(x) = 2$ y $g'(x) = 10x$, se tiene:

$$h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) = (2x + 3)\,10x + 2(5x^2 + 4) =$$
$$= 30x^2 + 30x + 8$$

- Sea $h:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = (3x^2 + 6)(x + 1)$; entonces, si escribimos $f(x) = 3x^2 + 6$ y $g(x) = x + 1$, se tiene $h = fg$; como $f'(x) = 6x$ y $g'(x) = 1$, obtenemos:

$$h'(x) = (fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) =$$
$$= (3x^2 + 6) \cdot 1 + 6x(x + 1) = 3x^2 + 6 + 6x^2 + 6x = 9x^2 + 6x + 6$$

11.2. Sea $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $]a,b[$; entonces para $n \geqslant 1$ la función $f^n:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f^n(x) = [f(x)]^n$ es derivable en $]a, b[$, y se verifica:

$$(f^n)'(x) = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$$

33. Sean $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 3x^2 - 1$, $g(x) = 6x + 5$.

Halla: a) $f'(x)$, b) $g'(x)$, c) $(fg)'(x)$

34. Considerando un número real c como una función constante de valor c, calcula, a partir de la fórmula de la derivada de un producto de funciones, la fórmula de la derivada del producto de una función por un número real, que estudiaste en el apartado **9.**

35. Calcula la derivada de los siguientes productos de funciones primeramente operando y después aplicando la fórmula de derivación de un producto:

a) $h(x) = (2x^3 + 4)\,(x^2 - 1)$

b) $h(x) = (6x^3 - 1)\,(x^2 + 4)$

c) $h(x) = (x^2 + 4x - 1)\,(3x^5 + 6x^3)$

d) $h(x) = (6x + 8)\,(2x - 3)$

Calcula en todos los casos $h'(0)$

36. Sean $f, g, h:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en $]a,b[$. Demuestra que fgh es derivable en $]a,b[$ y que

$$(fgh)'(x) = f'(x)\,g(x)\,h(x) + f(x)\,g'(x)\,h(x) +$$
$$+ f(x)\,g(x)\,h'(x)$$

En efecto:

$$(f^2)'(x) = (f \cdot f)'(x) = f(x) \cdot f'(x) + f'(x) f(x) = 2f(x) f'(x)$$

Análogamente:

$$(f^3)'(x) = (f^2 \cdot f)'(x) = f^2(x) \cdot f'(x) + (f^2)'(x) \cdot f(x) =$$
$$= f^2(x) f'(x) + 2f(x) f'(x) f(x) =$$
$$= f^2(x) f'(x) + 2f^2(x) f'(x) = 3f^2(x) f'(x)$$

Supongamos que $(f^{n-1})'(x) = (n-1) f^{n-2}(x) f'(x)$.

Como $f^n = f^{n-1} \cdot f$, resulta $(f^n)'(x) = (f^{n-1} \cdot f)'(x) =$

$= (f^{n-1})'(x) \cdot f(x) + f^{n-1}(x) \cdot f'(x) =$

$= (n-1) f^{n-2}(x) \cdot f'(x) \cdot f(x) + f^{n-1}(x) \cdot f'(x) =$

$= (n-1) f^{n-1}(x) \cdot f'(x) + f^{n-1}(x) \cdot f'(x) =$

$= f^{n-1}(x) \cdot f'(x) \cdot [(n-1) + 1] = n f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$,

luego $\forall \; n \geqslant 2 \; (f^n)'(x) = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$.

Ejemplo:

- Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^2 + 4$; entonces, la derivada de $h(x) = (3x^2 + 4)^5$ es $h'(x) = 5(3x^2 + 4)^4 (6x) = 30x(3x^2 + 4)^4$.

11.3. En algunas ocasiones la variable dependiente no aparece despejada. Veamos cómo se procede en estos casos.

Supongamos que y puede expresarse como función de x. Sea $y = f(x)$; entonces, si se tiene la relación

$$g(x) + a_n y^n + \ldots + a_1 y + a_0 = 0 \; [1], \text{ resulta}$$
$$(y^n)' = [f^n(x)]' = n f^{n-1}(x) \cdot f'(x) = n y^{n-1} y'$$

Análogamente, para las restantes potencias. Derivando en la relación [1] se tiene: $g'(x) + n a_n y^{n-1} y' + \ldots + a_1 y' = 0$

de donde $y' = -\dfrac{g'(x)}{n a_n y^{n-1} + \ldots + a_1}$

Ejemplos:

- Sea $x^2 + y^2 = 9$; entonces, $2x + 2yy' = 0$, de donde $y' = -\dfrac{x}{y}$

- Sea $3x^3 + 2x^2 y^3 + 6xy + 8 = 0$; entonces

$$9x^2 + 4xy^3 + (2x^2)\, 3y^2 y' + 6y + 6xy' = 0, \text{ de donde}$$
$$y' = -\frac{9x^2 + 4xy^3 + 6y}{6x^2 y^2 + 6x}$$

Este proceso de derivación se conoce con el nombre de *derivación implícita.*

37. Aplica el resultado del ejercicio anterior para calcular la derivada de $h(x) = (3x^2 + 6x + 1)(x^2 - 1)(x^3 + 5x)$

38. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (3x^3 + 4x)^6$

b) $g(x) = (6x^5 + 4x^2 - 1)^5$

c) $h(x) = (3x^2 + 5)^9 (x^2 + 7)^4 + x^2 - 1$

39. Dada la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x^3 + 2)^2 (x + 1)^3$, halla su derivada en $x = 0$, es decir, calcula $f'(0)$.

40. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = (x^3 + 2x^2 - 1)^4$ en el punto de abscisa $x = 1$.

41. Dada la relación $x^2 + y^3 = x$, halla y' por derivación implícita.

42. Halla por derivación implícita y' en las siguientes relaciones:

a) $y^2 - x^2 = 6$

b) $y^3 + x^3 = 1$

12 Derivada de un cociente de funciones

Sabemos que si $f,\ g\colon]a,\ b[\longrightarrow \mathbb{R}$, entonces el cociente $\frac{f}{g}$ está definido en aquellos puntos x tales que $g(x) \neq 0$.

Si f y g son derivables, nos proponemos encontrar una expresión de la derivada del cociente $\frac{f}{g}$ en función de las derivadas de f y de g.

Teniendo en cuenta que $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, una vez conocida la derivada de $\frac{1}{g}$ podemos aplicar la fórmula de la derivada de un producto para obtener la derivada de $\frac{f}{g}$.

Vamos en primer lugar a estudiar la derivada de la función inversa; para ello es necesaria la siguiente propiedad:

12.1. Sean $f\colon]a,\ b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función $x_0 \in]a,\ b[$; entonces si existe $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$ y este límite es distinto de cero, existe un intervalo abierto $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ tal que $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, $f(x)$ y l tienen el mismo signo.

En efecto: supongamos $l = \lim_{x \to x_0} f(x) > 0$; sea ϵ tal que $0 < \epsilon < l$, entonces $0 < l - \epsilon < l + \epsilon$; para este ϵ, por ser $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Entonces: $-\epsilon < f(x) - l < \epsilon \Rightarrow l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$, y como $0 < l - \epsilon$, resulta: $0 < f(x)$, es decir, $\forall\ x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, l y $f(x)$ son positivos.

De análoga forma se demuestra en el caso de que $l < 0$ (ver ejercicio **43**).

12.2. Sea $f\colon]a,\ b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $x_0 \in]a,\ b]$ y tal que $f(x_0) \neq 0$; entonces, $\frac{1}{f}$ está definida en un entorno de x_0, es derivable en x_0 y se tiene:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$$

En efecto: en virtud del teorema **12.1.**, $\frac{1}{f}(x)$ está definida para x en un entorno de x_0. Por otra parte,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x_0+h) - \frac{1}{f}(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{f(x_0+h)} - \frac{1}{f(x_0)}}{h}$$

(La expresión $\frac{1}{f(x_0+h)}$ tiene sentido, pues, por **12.1.**, en un cierto entorno de x_0, $f(x_0+h)$ y $f(x_0)$ tienen el mismo signo, y como $f(x_0) \neq 0$, $f(x_0+h)$ debe ser distinto de cero)

Se tiene entonces:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0)-f(x_0+h)}{hf(x_0)f(x_0+h)} = \lim_{h\to 0}\left[-\frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}{f(x_0)f(x_0+h)}\right] =$$

$= -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$, ya que $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ por ser f continua en x_0.

(Recuerda del curso 2.º que derivabilidad implica continuidad)

Ejemplos:

- Sea $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$; entonces, $g = \frac{1}{f}$, donde $f(x) = x^2 + 1$.
  Como f es derivable en $x_0 = 2$ y $f(x_0) = 5 \neq 0$, se tiene que g es derivable en $x_0 = 2$ y $g'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2} = -\frac{4}{5^2} = -\frac{4}{25}$
- Sea $g:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{1}{2x+3}$; ¿es g derivable en $x_0 = 7$?
  Siendo $g = \frac{1}{f}$ con $f(x) = 2x + 3$, como f es derivable en $x_0 = 7$ y $f(7) = 17 \neq 0$, g es derivable en $x_0 = 7$ y $g'(7) =$
  $= -\frac{f'(7)}{[f(7)]^2} = -\frac{2}{17^2} = -\frac{2}{289}$

12.3. De **12.2** se deduce que:

Si $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $]a, b[$, y si f no se anula en ningún punto de $]a, b[$, entonces $\frac{1}{f}$ es derivable en $]a, b[$, y se tiene para la función derivada:

$$D\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

43. Demuestra el teorema **12.1.** en el caso de que $l < 0$.

44. Estudia si son derivables en su dominio las funciones:

$f:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x}$

$g:]-1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = \frac{2}{x+1}$

$h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $h(x) = \frac{1}{x^2+4}$

$l: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $l(x) = \frac{1}{2x^2+1}$

45. Halla, en las funciones del ejercicio **44**, las derivadas, en el caso de que existan.

46. Halla, para las funciones del ejercicio **44**, $f'(1)$, $g'(0)$, $h'(-1)$, $l'(-5)$

47. ¿Se anula para algún valor de x la derivada de la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$? Halla, en caso afirmativo, dicho valor de x.

Ejemplo:

- Sea $g:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{1}{3x+6}$; entonces $g = \dfrac{1}{f}$, donde $f(x) = 3x + 6$. Como f es derivable en $]0, \infty[$ y $\forall\, x \in]0, \infty[\, f(x) \neq 0$, se tiene que g es derivable en $]0, \infty[$ y $g'(x) = \left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = -\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -\dfrac{3}{(3x+6)^2}$

12.4. *Derivada de un cociente de funciones*

Sean f y $g:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en $]a,b[$ tales que $\forall\, x \in]a,b[\ g(x) \neq 0$; entonces $\dfrac{f}{g}$ es derivable en $]a,b[$, y se tiene: $D\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

$\dfrac{f}{g} = f \cdot \dfrac{1}{g}$; por hipótesis, f es derivable en $]a,b[$ y por **12.3.** $\dfrac{1}{g}$ es derivable en $]a, b[$; luego por **11.1.** $f \cdot \dfrac{1}{g} = \dfrac{f}{g}$ es derivable en $]a, b[$.

Se tiene: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \dfrac{1}{g}\right)'(x) = f(x) \cdot \left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) + f'(x) \cdot \left(\dfrac{1}{g}\right)(x) =$

$= f(x)\left(-\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}\right) + f'(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \dfrac{f'(x)}{g(x)} =$

$= \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Ejemplos:

- Sean $f, g:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 3x^2 + 8, g(x) = x$; entonces, f y g son derivables en $]0, \infty[$, y se tiene $f'(x) = 6x$, $g'(x) = 1$. Además, $\forall\, x \in]0, \infty[\ g(x) = x \neq 0$, luego $\dfrac{f}{g}$ es derivable en $]0, \infty[$, y su función derivada es: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) =$

$= \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \dfrac{(6x)(x) - (3x^2+8)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{3x^2 - 8}{x^2}$

- Sea $h:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \dfrac{x-1}{2x^2+4}$; entonces,

$$h = \frac{f}{g}, \text{ con } f(x) = x - 1 \text{ y } g(x) = 2x^2 + 4.$$

Se tiene que f y g son derivables en $]0, \infty[$ y $f'(x) = 1$, $g'(x) = 4x$; además, $\forall\, x \in]0, \infty[\ g(x) \neq 0$, luego h es derivable en $]0, \infty[$, y se tiene:

$$h'(x) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} =$$

$$= \frac{1\cdot(2x^2+4) - (x-1)(4x)}{(2x^2+4)^2} = \frac{-2x^2 + 4x + 4}{(2x^2+4)^2}$$

48. Estudia si las funciones:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2+4}$

$g:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{x+3}{x^2}$

$h:]2, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

$k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, k(x) = \dfrac{3x^2-1}{6x^2+8}$

$l:]0,8[\longrightarrow \mathbb{R}, l(x) = \dfrac{3x+4}{x^2+8x-9}$

son derivables en su dominio.

49. Halla las derivadas de las funciones derivables del ejercicio anterior.

50. Dadas las funciones

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{2}{x^2+6}$

$g:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{3x^6+5}{2x+1}$

$h:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{2x^2+4x-1}{x^3-1}$

$k:]-3,3[\longrightarrow \mathbb{R}, k(x) = \dfrac{6x^3+5x^2-1}{x^2-16}$

$l: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, l(x) = \dfrac{3x^3+4}{x^2+9}$

halla: $f'(0), g'(1), h'(2), k'(0), l'(-8)$

13 Derivada de una composición de funciones: Regla de la cadena

13.1. Sean $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ y $g:]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $\text{Im}(f) \subset]c,d[$; entonces sabemos que está definida la función compuesta $g \circ f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$. Nos proponemos encontrar la derivada de esta composición, conocidas las derivadas de g y de f.

La relación entre las derivadas de $g \circ f$ y las de g y f se conoce con el nombre de Regla de la cadena, y es un resultado de gran utilidad en el cálculo de derivadas.

13.2. Sea $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $]a,b[$ y $g:]c,d[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $]c,d[$ tal que $\text{Im}(f) \subset]c,d[$; entonces, la función $g \circ f$ es derivable en $]a,b[$ y

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Justificamos a continuación este teorema sin pretender dar una demostración rigurosa.

Hagamos $y = f(x)$ y $z = g(y)$; entonces:

$z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$: por **6.2.** se tiene que $dz = g'(y) \cdot dy$

Análogamente, $dy = f'(x)dx$; luego:

$$dz = g'(y) \cdot f'(x)dx = g'[f(x)] \cdot f'(x)dx$$

y como el coeficiente de dx es la derivada de z, se tiene:

$$\frac{dz}{dx} = (g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x) \text{ Ver (6.2)}$$

La expresión anterior recibe el nombre de *Regla de la cadena*. En notación de Leibnitz, la Regla de la cadena se escribe: $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$; pero debe tenerse siempre presente que esto es una notación y no un cociente y, por tanto, no puede simplificarse la expresión.

Ejemplos:

- Consideremos la función $h(x) = (3x^2 + 5x + 1)^8$; entonces $h = g \circ f$, donde $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$ y $g(x) = x^8$, ya que

  $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = [f(x)]^8 = (3x^2 + 5x + 1)^8 = h(x)$

  Se sabe que $f'(x) = 6x + 5$ y que $g'(x) = 8x^7$. Aplicando la Regla de la cadena, tenemos llamando $f(x) = u$,

  $$h'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x) = g'(u)f'(x) = 8u^7 f'(x) =$$
  $$= 8[f(x)]^7 \cdot (6x + 5) = 8(3x^2 + 5x + 1)^7(6x + 5)$$

51. Se considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x^2 + 7x - 8)^3$

Halla la función derivada de f desarrollando primeramente la potencia y después aplicando la Regla de la cadena.

52. Sea la función $f:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{(3x^3 + 8x)^4}$. Halla, aplicando la Regla de la cadena, $f'(x)$.

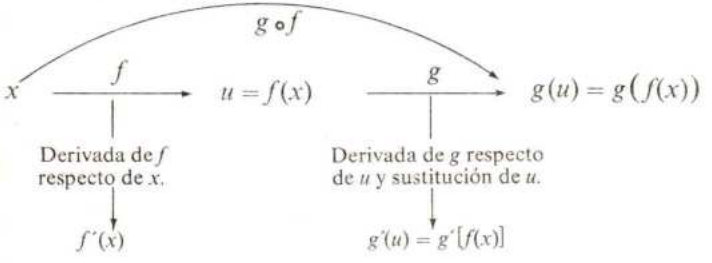
• Sea h: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = (2x^2 + 4)^{15}$; entonces $h = g \circ f$, donde $f(x) = 2x^2 + 4$ y $g(x) = x^{15}$. Se tiene:

$$h'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)$$

Llamando $f(x) = u$ y teniendo en cuenta que $g'(x) = 15x^{14}$ y $f'(x) = 4x$, resulta: $h'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x) = g'(u)f'(x) =$
$= 15u^{14} \cdot 4x = 15 \cdot (2x + 4)^{14} \cdot 4x = 60x(2x + 4)^{14}$

13.3. La Regla de la cadena puede aplicarse a una composición de más de dos funciones; por ejemplo: $(h \circ g \circ f)(x) =$
$= h'[(g \circ f)(x)] \cdot (g \circ f)'(x) = h'[g(f(x))] \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

13.4. Una forma práctica de aplicar la Regla de la cadena es descomponer la aplicación como se indica seguidamente



luego $(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'[f(x)]$

Ejemplo:

Sea h: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 3(x^2 + 8)^3$

$$x \xrightarrow{f} x^2 + 8 = u \xrightarrow{g} g(u) = 3u^3$$
$$f'(x) = 2x \qquad g'(u) = 9u^2 = 9(x^2 + 8)^3$$

luego $h'(x) = (g \circ f)'(x) = 2x \cdot 9 \cdot (x^2 + 8)^2 = 18x(x^2 + 8)^2$

53. Halla la derivada de la función

$$f(x) = \frac{1}{(x^3 + 2x)^2 + 1}$$

(*Indicación:* Aplica la Regla de la cadena a las funciones $g(x) = x^3 + 2x$ y $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$)

Halla $f'(0)$.

54. Sean u y v: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $u(0) = 1$ y $v(0) = 2$. Sabiendo que $u'(0) = 2$ y $v'(0) = 2$, halla $f'(0)$ siendo $f = (u + v)^3$.

(*Indicación:* Considera la función $u + v = g$ y aplica la Regla de la cadena.)

14 Derivada de la función recíproca

14.1. Si f: $]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva, entonces se sabe que f posee una función recíproca, f^{-1}: $f(]a,b[) \longrightarrow \mathbb{R}$, que es la función definida por $f^{-1}(y) = x$, donde x es tal que $f(x) = y$, es decir, $f \circ f^{-1} = 1$ y $f^{-1} \circ f = 1$.

Si f es continua e inyectiva, se puede demostrar que $f(]a,b[) =$
$=]f(a), f(b)[$ o bien $]f(b), f(a)[$, pues no sabemos si será $f(a) < f(b)$ o al revés.

El objeto de este apartado es tratar de encontrar la derivada de f^{-1}, conocida la de f.

14.2. Si f es inyectiva y continua, y si $f'(x_0) = 0$, f^{-1} *no* es derivable en $y_0 = f(x_0)$.

Para demostrarlo supongamos que f^{-1} tuviese derivada en y_0; como $f^{-1} \circ f = 1$, aplicando la Regla de la cadena se tendría:

$$1'(x_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = (f^{-1})'(y_0) \cdot 0 = 0,$$

y como 1 es la función identidad $1(x) = x$, $1'(x) = 1$, luego se obtiene $1 = 0$, lo que es absurdo; por tanto, f^{-1} *no* puede tener derivada en $y_0 = f(x_0)$.

14.3. Recordando (ver 2.º curso B.U.P. **Santillana**) que la gráfica de la función recíproca de f es la simétrica de la gráfica de f respecto de la bisectriz del primer cuadrante, podemos entonces ver de manera gráfica cuál es la dificultad que surge al ser $f'(x_0) = 0$, pues en este caso (Fig. 10) la pendiente de la tangente a la gráfica de f en $P(x_0, y_0)$ es paralela al eje OX, por lo que la tangente a la gráfica de f^{-1} en $P'(y_0, x_0)$ será paralela al eje OY, es decir, que la curva *no* tiene pendiente en P' y, por tanto, no existe derivada en $y_0 = f(x_0)$.

14.4. Podemos ahora preguntarnos bajo qué condiciones de la función f será f^{-1} derivable.

Vamos a dar una respuesta intuitiva a esta cuestión, ya que una demostración rigurosa está fuera del nivel del curso.

Supongamos que f es continua en $]a,b[$; entonces f^{-1} es continua, pues si la gráfica de f puede trazarse de manera continua, lo mismo sucederá con la de f^{-1}, que es simétrica respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

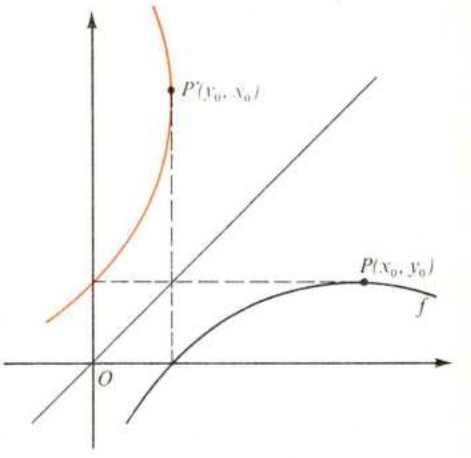
Si queremos que f^{-1} tenga derivada en y_0, su gráfica debe tener una tangente en (y_0, x_0) *no* paralela al eje OY, luego, como se ve en la figura 11, la tangente a f en (x_0, y_0) *no* puede ser paralela a OX, es decir, debe ser $f'(x_0) \neq 0$.

Podemos entonces enunciar:

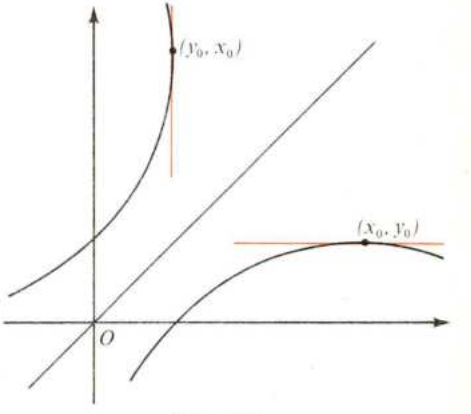
Sea $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ inyectiva, continua en $]a,b[$ y derivable en x_0; entonces si $f'(x_0) \neq 0$, f^{-1} es derivable en $y_0 = f^{-1}(x_0)$.

14.5. Sea $y = f(x)$, donde $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva y continua en $]a,b[$; si f es derivable en $x_0 \in]a,b[$ y $f'(x_0) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en $y_0 = f^{-1}(x_0)$, y se tiene:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{y'(x_0)}$$



(Fig. 10)



(Fig. 11)

55. De las siguientes funciones di cuáles son inyectivas y halla sus inversas:

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

b) $g:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$

c) $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^3$

d) $k: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $k(x) = x - 6$

56. De las funciones del problema **55** encuentra cuáles tienen inversa derivable y halla dicha derivada.

57. La función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ ¿es inyectiva? ¿Y derivable? ¿Existe $(f^{-1})'(0)$?

En efecto: se sabe que $f \circ f^{-1} = 1$; como f^{-1} es derivable, aplicando la Regla de la cadena:

$$1'(y_0) = f'[f^{-1}(y_0)]\ (f^{-1})'(y_0) = f'(x_0)(f^{-1})'(y_0)$$

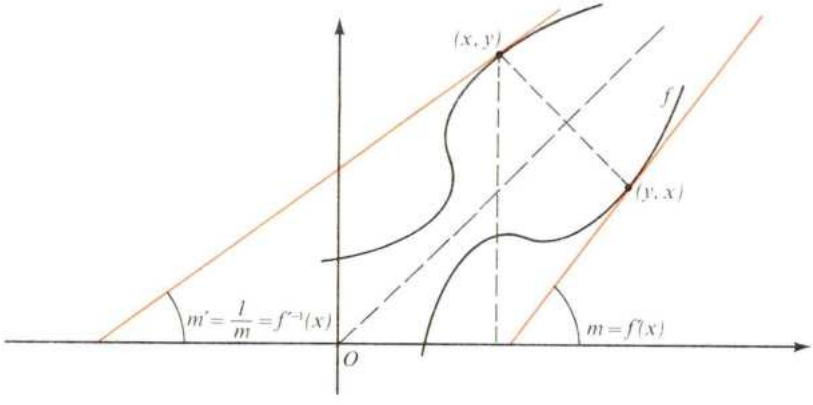
Como $1'(y_0) = 1$, se tiene: $1 = f'(x_0)(f^{-1})'(y_0)$, de donde:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{y'(x_0)}$$

14.6. Sea $y = f(x)$, donde $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva, derivable en $]a,b[$ y $\forall\, x \in]a,b[\ f'(x) \neq 0$; entonces f^{-1} es derivable en $]f(a),f(b)[$, y se verifica:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{y'}$$

Nota: En la práctica, para aplicar la regla de derivación de la función recíproca conviene escribir la función f^{-1} en la forma $x = f^{-1}(y)$, ya que al calcular la derivada de f^{-1} en (x,y) tenemos que emplear la de f en (y,x), como se indica en la figura 12.



(Fig. 12)

Ejemplos:

- Consideremos $f:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = \sqrt{x}$. Vamos a calcular su derivada: f es inversa de $x = y^2$ cuya derivada es $x' = 2y$; entonces: $f'(x) = \dfrac{1}{x'} = \dfrac{1}{2y}$

  Como $y = \sqrt{x}$, resulta $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

- Análogamente, sea $y = \sqrt[n]{x}$; entonces la función inversa es $x = y^n$, cuya derivada es $x' = ny^{n-1}$

  luego $y' = \dfrac{1}{x'} = \dfrac{1}{ny^{n-1}} = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

58. Estudia las mismas cuestiones que en el ejercicio **57** para la función $g:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^3$.

(*Indicación:* Observa la importancia de considerar el dominio de la función.)

59. Dada la función $f:]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ $y = f(x) = \dfrac{1}{x^5}$, demuestra que f^{-1} es derivable en $]0, \infty[$ y halla $(f^{-1})'(3)$.

Ejercicios y cuestiones

60. Halla la pendiente de la gráfica de la función $y = x^3 - 2x + 8$ en el punto (1,7).

61. Halla la ecuación de la tangente a la curva de ecuación $y = 2x^6 - 3x + 8$ en el punto (0,8).

62. ¿En qué puntos de la curva $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 1$ la tangente es paralela al eje OX?

63. Demuestra que toda función derivable en x_0 es continua en x_0.

64. Demuestra que la derivada de $f(x)$ en x_0 puede escribirse como $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

65. Halla, utilizando la fórmula del ejercicio **64**, las derivadas siguientes:
a) $f'(0)$ con $f(x) = x^2 - 1$, b) $g'(-1)$ con $g(x) = x^3 + 3x^2 - x + 8$.

66. Representa las funciones $g, f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x - 1|$ y $g(x) = E(x)$ (parte entera de x) y calcula $f'_+(1), f'_-(1), f'_+(1)$ y $f'_-(1)$ ¿Qué se puede decir de la derivabilidad de f y g en $x_0 = 1$?

67. Halla las funciones derivadas, derivada segunda y derivada tercera de la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 6x^4 + 4x^3 + 6x - 8$.

68. Demuestra que si $(]a,b[)$ es el conjunto de todas las funciones derivables en $]a,b[$, entonces $(]a,b[)$ con la suma de funciones y el producto de una función por un número real es un espacio vectorial real.

69. Halla la derivada de la función $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = (3x^3 + 4x)(2x^5 - 8x^3 + 6)$

70. Sean $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas por $f(x) = x^3 + 1$ $g(x) = x^2 + 4$. Halla la derivada de las funciones $2f + 3g$, fg, $\frac{f}{g}$. ¿Cuánto valen $(fg)'(0)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)'(-1)$?

71. Si f y g son funciones derivables en $]a,b[$ y si $\forall\, x \in]a,b[, f(x)g(x) \neq 0$, demuestra que $\frac{1}{fg}$ es derivable en $]a,b[$ y halla su derivada en función de las de f y g.

72. Compón las funciones $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^5$ y $g(x) = 3x^2 + 8$ en las dos formas posibles (es decir, $g \circ f$ y $f \circ g$) y calcula $(g \circ f)'$ y $(f \circ g)'$.

73. Halla la derivada de las siguientes funciones: $f(x) = (6x^2 + 3x + 7)^4$, $g(x) = \frac{1}{(3x^2 + 8)^2 + 1}$, $h(x) = \sqrt{6x^3 + 1}$. (*Indicación:* Utiliza la Regla de la cadena)

74. Si f, g, h son funciones que pueden componerse y derivables en $]a,b[$, demuestra que $h \circ g \circ f$ es derivable en $]a,b[$ y se verifica: $(h \circ g \circ f)'(x) = h'(g(f(x)))\ \ g'(f(x))\ \ f'(x)$

75. Halla la derivada de las funciones recíprocas de las funciones g, h, k de ejercicio **55** en el caso de que su recíproca sea derivable.

Tema 14 DERIVADA DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

En este tema vamos a calcular la derivada de las funciones de uso más frecuente en Matemáticas, que se conocen con el nombre de funciones elementales. Abarca esta denominación a las funciones polinómicas –cuya derivada ya hemos visto en el tema anterior–, potenciales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

La mayoría de las funciones que manejamos son combinaciones de estas funciones; por ello el conocimiento de sus derivadas es imprecindible para manejar en la práctica el cálculo de derivadas.

1 Derivada de la función potencial de exponente negativo

1.1. Hemos visto en el tema anterior que si n es un número natural, la derivada de la función potencial de exponente natural $y = x^n$ viene dada por $y' = nx^{n-1}$. Vamos a tratar de extender esta fórmula para el caso en que el exponente sea negativo.

Sea n un número natural. La función $y = x^{-n}$ se llama la función potencial de exponente negativo; dado que $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, esta función es la inversa de la potencial de exponente natural, por tanto estará definida y será derivable en todo punto en que no se anule el denominador, es decir, en todo punto $x \neq 0$.

1.2. *La función $y = x^{-n}$ es derivable en todo $x \neq 0$ y se tiene*

$$\mathbf{y' = -\,nx^{-(n+1)} = -\,nx^{-n-1}}$$

En efecto: $y = \dfrac{1}{x^n}$; si llamamos $f(x) = x^n$, se tiene $y = \dfrac{1}{f(x)}$

Aplicando la regla de derivación de la función inversa, obtendremos:

$$y' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -\frac{nx^{n-1}}{[x^n]^2} =$$

$$= -\,nx^{n-1-2n} = -\,nx^{-(n+1)} = nx^{-n-1}$$

1.3. *Si $u:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en $]a, b[$ y n un número natural, $n \geqslant 1$, entonces la función $y = u^{-n}$ es derivable en aquellos puntos x_0 tales que $u(x) \neq 0$ y se tiene:*

$$\mathbf{y' = -\,n\,u^{-(n+1)}u'}$$

Ejercicios:

1. Halla la derivada de las funciones:

a) $y = x^{-8}$

b) $y = x^{-7} + x^{-2} - 5$

c) $y = \dfrac{1}{x^5} + \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x} + 7$

2. Halla la derivada de las funciones:

a) $y = (x^2 + 3)^{-4}$

b) $y = (2x + 8)^{-7}$

c) $y = \dfrac{1}{(2x^3 + 2)^3}$

En efecto: y se puede considerar como la composición

$$y: x \xrightarrow[u']{u} u(x) = z \xrightarrow[v' = -nz^{-(n+1)} = -nu^{-(n+1)}]{v} v(z) = z^{-n}$$

luego por la Regla de la cadena: $y' = -n\,u^{-(n+1)}u'$.

Ejemplos:

- Sea $y = x^{-5}$; entonces $y' = -5x^{-6}$
- Para derivar la función $y = (3x^2 - 1)^{-5}$ consideremos la siguiente composición:

$$y: x \xrightarrow[u' = 6x]{u} 3x^2 - 1 = z \xrightarrow[v' = -5z^{-6} = -5(3x^2 - 1)^{-6}]{v} z^{-5} = v(z)$$

y aplicando la Regla de la cadena:

$$y' = u'v' = 6x\,[-5(3x^2 - 1)^{-6}] = -30x(3x^2 - 1)^{-6}$$

3. Calcula la derivada de las funciones:

a) $y = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

b) $y = (x^2 + 1)^6 + (x^2 - 1)^{-6} + (x + 1)^{-5}$

4. ¿En qué puntos no es derivable la función $y = (3x^2 - 6)^{-8}$? Halla su derivada en los demás puntos.

5. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = \frac{1}{(x^2 - 4)^3}$ en el punto $\left(3, \frac{1}{125}\right)$

2 Derivada de la función logarítmica

El logaritmo de un número N en base el número e generalmente se representa por $\log_e N$, InN o bien LN, y se lee: *logaritmo neperiano de N*. En lo que sigue utilizaremos la notación LN.

2.1. *Sea* $y: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función logarítmica* $y = Lx$; *entonces* y *es derivable en* $\mathbb{R}_+$ *y se verifica:* $\mathbf{y' = \frac{1}{x}}$

En efecto: $y' = \lim_{h \to 0} \frac{L(x + h) - Lx}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{L\left(\frac{x + h}{x}\right)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} L\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \to 0} L\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}$$

Como la función logarítmica es continua, se tiene:

$$y' = L\left[\lim_{h \to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}\right] = L \lim_{h \to 0}\left[\left(1 + \frac{1}{x/h}\right)^{\frac{x}{h} \cdot \frac{1}{x}}\right] =$$

$$= L\left[\lim_{h \to 0}\left(1 + \frac{1}{x/h}\right)^{x/h}\right]^{1/x} = \frac{1}{x} L\left(\lim_{h \to 0}\left(1 + \frac{1}{x/h}\right)^{x/h}\right) = \frac{1}{x} Le = \frac{1}{x}$$

ya que $\lim_{h \to 0}\left(1 + \frac{1}{x/h}\right)^{x/h} = e$ (Ver 2.º B.U.P. **Santillana**)

2.2. *Si* $u:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función derivable en* $]a, b[$ *tal que* $\forall\, x \in]a, b[\ u(x) > 0$, *entonces la función* $y = L[u(x)]$ *es derivable en* $]a, b[$, *y se verifica:*

$$\mathbf{y' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

En efecto: y puede considerarse como la composición

$$y: x \xrightarrow[u'(x)]{u} u(x) = z \xrightarrow[v'(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{u(x)}]{v} L(z) = L[u(x)]$$

Aplicando la Regla de la cadena:

$$y' = u'(x)\,v'(z) = u'(x)\frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Ejemplos:

- Si $y = (L\,x)^2$, entonces $y = f^2$, donde $f(x) = L\,x$, luego
$$y' = 2ff' = 2(L\,x)\frac{1}{x} = \frac{2L\,x}{x}$$
- Sea $y = L\,(x^3 + 2x + 1)$; entonces $y = L[u(x)]$, donde $u(x) = x^3 + 2x + 1$, luego su derivada será:
$$y' = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 1}$$
- Para derivar la función $y = [L\,(x^2 + 6x + 1)]^2$, consideremos la composición:
$$y: x \xrightarrow[u' = 2x + 6;]{u} x^2 + 6x + 1 = z \xrightarrow[v' = \frac{1}{z};\ w' = 2t,]{v} L(z) = t \xrightarrow{w} t^2$$
de donde por la Regla de la cadena:
$$y' = u'v'w' = (2x + 6)\frac{1}{z}\cdot 2t = (2x + 6)\frac{1}{x^2 + 6x + 1}\cdot 2\left(L(z)\right) =$$
$$= \frac{2[L\,(x^2 + 6x + 1)]\,(2x + 6)}{x^2 + 6x + 1}$$

2.3. *Sea* a *un número real positivo distinto de 1; entonces la función* $y = \log_a x$ *es derivable en* $\mathbb{R}_+$ *y se verifica:*

$$\mathbf{y' = \frac{1}{x}\log_a e}$$

En efecto: de $y = \log_a x$ obtenemos $a^y = x = e^{L\,x}$; tomando logaritmos en base a, $y = \log_a x = L\,x \cdot \log_a e$, de donde:

$$y' = \frac{1}{x}\log_a e$$

6. Halla la derivada de las funciones:

a) $y = (Lx)^3$

b) $y = 6(Lx)^2 - 5(Lx) + \dfrac{1}{L(x)}$

c) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{(Lx)^2 + 5}$

7. Halla la derivada de estas funciones:

a) $y = L(x^2 + 5x + 3)$

b) $y = L\left(\dfrac{3x + 2}{x^2}\right)$

c) $y = L\left(\dfrac{x^5}{x^3 + Lx}\right)$

d) $y = L[(x^2 + 5)^3]$

2.4. *Si* $u:]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función derivable en* $]c, d[$ *y tal que* $\forall\, x \in]c, d[\ u(x) \geqslant 0$ *y* a *es un número real positivo distinto de 1, entonces la función* $y = \log_a [u(x)]$ *es derivable en* $]c, d[$, y se tiene:

$$\mathbf{y' = \frac{u'(x)}{u(x)} \log_a e}$$

En efecto: la función $y = \log_a [u(x)]$ la podemos considerar compuesta del modo siguiente:

$$y: x \xrightarrow{u} u(x) = z \xrightarrow{v} v(z) = \log_a z;$$

y aplicando la Regla de la cadena:

$$y' = u'(x) \cdot v'(z) = u'(x) \frac{1}{z} \log_a e = \frac{u'(x)}{u(x)} \log_a e$$

Ejemplos:

- Sea $y = \log_3 x$; entonces $y' = \frac{1}{x} \log_3 e$
- La función $y = \log_2 (3x^5 - 4x)$ es de la forma $y = \log_2 u(x)$, luego su derivada será: $y' = \frac{u'(x)}{u(x)} \log_2 e = \frac{15x^4 - 4}{3x^5 - 4x} \log_2 e$
- Sea $y = \log_6 (2x^2 + 4)$; entonces $y' = \frac{4x}{2x^2 + 4} \log_6 e$

8. Halla la derivada de $y = L(x^2 + 8x + 1)$. ¿En qué puntos se hace nula dicha derivada?

9. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = L(x^2 - 5x + 8)$ en el punto de abscisa $x_0 = 1$.

10. Halla el valor de la derivada de $y = \log_5 (x^3 + 2x - 1)$ para $x_0 = 2$.

3. La derivación logarítmica

3.1. La derivada de la función logarítmica, junto con la Regla de la cadena, nos conduce a un método de derivación extraordinariamente útil en el caso de productos, cocientes o potenciación de funciones, que se conoce con el nombre de *derivación logarítmica.*

Sea $y = f(x)$ una función que toma valores positivos; entonces la función $z = Ly = L[f(x)]$ puede considerarse compuesta del modo siguiente:

$$z: x \xrightarrow{f} f(x) = y \xrightarrow{v} Ly = L[f(x)]$$

luego aplicando la Regla de la cadena se tiene:

$$z' = f'(x) \cdot \frac{1}{y} = \frac{y'}{y},$$

de donde $y' = y \cdot z'$

Ejemplos:

- Sea $y = x^x$; entonces $z = Ly = x\,Lx$, de donde

$$z' = \frac{y'}{y} = Lx + x \cdot \frac{1}{x} = Lx + 1, \text{ y por tanto}$$

$$y' = y \cdot z' = x^x(Lx + 1)$$

- Si $r \in \mathbb{Q}$, sea la función $y = x^r$; entonces $z = L\,y = r\,L\,x$, de donde $z' = \frac{y'}{y} = \frac{r}{x}$ y por tanto: $y' = y \cdot z' = x^r \cdot \frac{r}{x} = rx^{r-1}$

El último ejemplo nos muestra que para derivar la función potencial de exponente racional $y = x^r$, con $r \in \mathbb{Q}$, la fórmula es la misma que en los casos en que el exponente es natural o entero.

Ejemplos:

- Sea la función $y = x^{\frac{3}{4}}$; entonces $y' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$
- Para derivar la función $y = \sqrt[n]{x^m}$ la escribimos en la forma $y = x^{\frac{m}{n}}$, entonces $y' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n}\sqrt[n]{x^{m-n}}$
- Sea $y = \sqrt[3]{x^2}$; entonces $y = x^{\frac{2}{3}}$, luego

$$y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Aplicando la Regla de la cadena se puede probar el siguiente resultado:

3.2. *Sea $u:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $]a, b[$; entonces la función $y = [u(x)]^r$, con $r \in \mathbb{Q}$, es derivable, y se tiene:*

$$\mathbf{y' = r[u(x)]^{r-1}\,u'(x)}$$

Ejemplo:

- Sea $y = \sqrt[5]{(x^2 + 5x - 3)^3}$; entonces $y = (x^2 + 5x - 3)^{\frac{3}{5}}$

Tomando $u(x) = x^2 + 5x - 3$ y aplicando la fórmula anterior, resulta:

$$y' = \frac{3}{5}(x^2 + 5x - 3)^{\frac{3}{5}-1}(2x + 5) =$$

$$= \frac{3}{5}(x^2 + 5x - 3)^{-\frac{2}{5}}(2x + 5),$$

de donde $y' = \dfrac{3(2x + 5)}{5\sqrt[5]{(x^2 + 5x - 3)^2}}$

Vamos a ver que la fórmula de derivación de funciones potenciales de exponente racional puede también extenderse al caso de exponente real.

11. Calcula mediante derivación logarítmica la derivada de $y = x^{1/x}$

12. Halla la derivada de las siguientes funciones utilizando la derivación logarítmica:

a) $y = x^{\sqrt{x}}$

b) $y = x^{Lx}$

c) $y = (x^5 + 4)^2(x^4 + 3)^3(x^3 + 2)^4$

d) $y = \sqrt[5]{(x^3 + 2)^2}$

13. Deduce mediante derivación logarítmica la fórmula de derivación de un producto de n funciones.

14. Calcula la ecuación de la tangente a la curva de ecuación $y = f(x) = (x + 3)^{x+2}$ en el punto de abscisa $x_0 = 0$.

15. Halla la derivada de las funciones:

a) $y = x^{3/7}$

b) $y = (2x + 6)^{3/2}$

c) $y = [L(x^2 + 1)]^{4,5}$

d) $y = \sqrt{L(3x^2 + 6x - 1)}$

e) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$

f) $y = x^{\sqrt{7}} + x^e + 2x^2 + Lx$

3.3. *Sea $a \in \mathbb{R}_+$; la función $y = x^a$ es derivable en $\mathbb{R}_+$, y se verifica:* $\mathbf{y' = ax^{a-1}}$

En efecto, aplicando la derivación logarítmica, se tiene:

$z = Ly = a\,Lx$, de donde $z' = \dfrac{y'}{y} = a \cdot \dfrac{1}{x}$, por tanto:

$$y' = y \cdot z' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = a \cdot x^{a-1}$$

16. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = x^a$, donde $a \in \mathbb{R}_+$, en el punto $(1, 1)$.

4 Derivada de la función exponencial

4.1. *La función $y = a^x$, donde $a \in \mathbb{R}$, es derivable en $\mathbb{R}$, y se tiene:* $\mathbf{y' = a^x\,La}$.

En efecto, aplicando la derivación logarítmica, resulta:

$z = Ly = xLa$, de donde $z' = \dfrac{y'}{z} = La$, por tanto $y' = yz' = a^x La$

Ejemplos:

- Si $y = 3^x$, entonces $y' = 3^x\,L3$.
- Sea $y = (5^x)^6$; haciendo $f(x) = 5^x$, se tiene: $y = [f(x)]^6$, de donde $y' = 6[f(x)]^5 \cdot f'(x)$, luego $y' = 6(5^x)^5 \cdot 5^x \cdot L5 = 6(5^x)^6 \cdot L5$.

4.2. *Sea $]c, d[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $]c, d[$; entonces la función $y = a^{u(x)}$, con $a \in \mathbb{R}_+$, es derivable en $]c, d[$, y se tiene:*

$$\mathbf{y' = a^{u(x)}\,u'(x) \cdot La}$$

En efecto: y es la composición

$$y : x \xrightarrow{\ u\ } u(x) = z \xrightarrow{\ v\ } a^z = a^{u(x)}$$

Aplicando la Regla de la cadena se tiene:

$$y' = u'(x) \cdot v'(z) = u'(x) \cdot a^z\,La = u'(x) \cdot a^{u(x)} \cdot La$$

Ejemplos:

- Sea $y = 6^{x^2+5}$; entonces $y = 6^{u(x)}$ donde $u(x) = x^2 + 5$, por lo que $y' = 6^{u(x)}\,u'(x)\,L\,6 = 6^{x^2+5}\,2x\,L\,6 = 2\,(L\,6)x \cdot 6^{x^2+5}$
- Sea $y = 3^{4x}$; entonces $y = 3^{u(x)}$, donde $u(x) = 4x$, de donde: $y' = 3^{u(x)}\,u'(x)\,L3 = 3^{4x} \cdot L4 \cdot L3 = (L4)\,(L3)\,4^x \cdot 3^{4x}$

17. Calcula la derivada de las funciones:

a) $y = 2^x$

b) $y = 5^x + 6 \cdot 3^x - 2 \cdot 5^x$

18. Halla la derivada de las funciones:

a) $y = 3^{x^2}$

b) $y = 5^{x^3 - 8x}$

c) $y = 6^{(3x+8)^2}$

d) $y = (5^x)^x$

e) $y = 5^{x^2 - 1}$

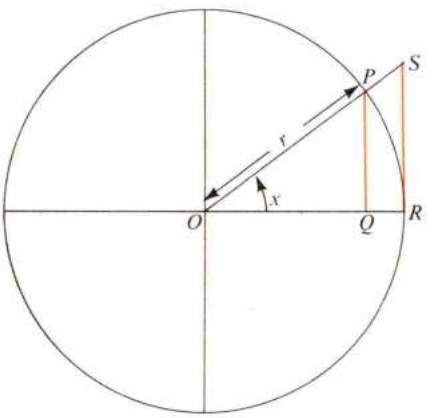
19. Halla la ecuación de la tangente a la curva de ecuación $y = 3^{6x+8}$ en el punto de abscisa $x = 0$.

20. ¿Para qué valores de x se hace cero la derivada de $y = 3^{x^2+6x}$?

5 Derivada de las funciones trigonométricas

5.1. Probemos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Consideremos en la circunferencia de la figura 1 el ángulo POR, cuya medida es x radianes, con $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$



(Fig. 1)

Se tiene: Area del triángulo $OQP <$ Area del sector $ORP <$ $<$ Area del triángulo ORS.

Como: $\begin{cases} \text{Area del triángulo } OQP = \dfrac{1}{2} r^2 \cos x \operatorname{sen} x \\ \text{Area del sector } ORP = \dfrac{1}{2} r^2 x \\ \text{Area del triángulo } ORS = \dfrac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} x, \end{cases}$

resulta: $\dfrac{1}{2} r^2 \cos x \operatorname{sen} x < \dfrac{1}{2} r^2 x < \dfrac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} x$,

de donde $\cos x < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} < \dfrac{1}{\cos x}$; teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, pues la función coseno es continua, resulta:

$$1 \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leqslant 1$$

Análogo resultado se obtiene si: $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} = 1$

por tanto: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}} = \dfrac{1}{1} = 1$

5.2. *Derivada de $y = \operatorname{sen} x$*

La función $y = \operatorname{sen} x$ es derivable en $\mathbb{R}$, y se verifica: $\mathbf{y' = \cos x}$.

$y' = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$; teniendo en cuenta que

$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2 \operatorname{sen} \dfrac{\alpha-\beta}{2} \cos \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, resulta:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{2\operatorname{sen} \dfrac{x+h-x}{2} \cos \dfrac{x+h+x}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{h}{2}}{\dfrac{h}{2}} \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

Como la función coseno es continua, se tiene que

$\lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos\left(\lim_{h\to 0}\left(x + \frac{h}{2}\right)\right) = \cos x$; por otra parte,

haciendo $k = \frac{h}{2}$, $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = \lim_{k\to 0} \frac{\operatorname{sen} k}{k} = 1$ (por **5.1.**),

luego $y' = \cos x$

5.3. *Si* $u:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función derivable en* $]a, b[$, *entonces la función* $y = \operatorname{sen}[u(x)]$ *es derivable en* $]a, b[$, *y se verifica:*

$$\mathbf{y' = u'(x) \cdot [\cos u(x)]}$$

En efecto: y es la composición

$$y: x \xrightarrow{u} u(x) = z \xrightarrow{v} v(z) = \operatorname{sen} z,$$

luego por la Regla de la cadena:

$$y' = u'(x) \cdot v'(z) = u'(x) \cos z = u'(x) \cos [u(x)]$$

Ejemplos:

- Sea $y = \operatorname{sen}^3 x$; entonces haciendo $f(x) = \operatorname{sen} x$ se tiene: $y = f^3(x)$, de donde $y' = 3f^2(x) \cdot f'(x) = 3\operatorname{sen}^2 x \cos x$.
- Para derivar la función $y = \operatorname{sen}(e^x + 3x^2 + 5)$ hacemos $u(x) = e^x + 3x^2 + 5$ y resulta:

$$y' = u'(x) \cdot \cos [u(x)] = (e^x + 6x) \cos (e^x + 3x^2 + 5)$$

- Sea $y = \operatorname{sen}^3 (3x^2 + 5)$; podemos descomponer y como

$$y: x \xrightarrow{u} 3x^2 + 5 = z \xrightarrow{v} \operatorname{sen} z = t \xrightarrow{w} t^3,$$

entonces, por la Regla de la cadena:

$$y' = u'(x) \cdot v'(z) \cdot w'(t) = 6x \cdot \cos z \cdot 3t^2 =$$
$$= 18x \cos (3x^2 + 5) \operatorname{sen}^2 t = 18x \cos (3x^2 + 5) \operatorname{sen}^2 (3x^2 + 5)$$

5.4. *Derivada de* $y = \cos x$

La función $y = \cos x$ *es derivable en* $\mathbb{R}$, *y se verifica:*

$$\mathbf{y' = -\operatorname{sen} x}$$

En efecto: la función $y = \cos x$ puede escribirse en la forma $y = \cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} u$. Derivando esta última función, resulta: $y' = -1 \cdot \cos u = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x$

21. Halla la derivada de las funciones:

a) $y = \operatorname{sen}^2 x$

b) $y = \operatorname{sen} x + 3x \operatorname{sen}^3 x$

c) $y = \operatorname{sen}^5 x + 4\sqrt{x} \operatorname{sen}^2 x + e^x \operatorname{sen} x$

22. Halla la derivada de las funciones:

a) $y = \operatorname{sen}^3 (3x^2 + 5x - 8)$

b) $y = \operatorname{sen} (e^x + \sqrt{x} + 3^x)$

c) $y = \operatorname{sen}^2 \left(L(3x^2 + 6)\right)$

23. Por derivación logarítmica halla las derivadas de las funciones:

a) $y = (\operatorname{sen} x)^x$

b) $y = x^{\operatorname{sen} x}$

c) $y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$

5.5. *Si* $u:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función derivable en* $]a. b[$, *entonces la función* $y = \cos [u(x)]$ *es derivable en* $]a, b[$, *y se verifica:*

$$\mathbf{y' = -u'(x) \operatorname{sen} [u(x)]}$$

En efecto: y es la composición

$$y: x \xrightarrow{\ u\ } u(x) = z \xrightarrow{\ v\ } v(z) = \cos z,$$

entonces, aplicando la Regla de la cadena:

$$y' = u'(x) \cdot v'(z) = -u'(x) \operatorname{sen} z = -u'(x) \operatorname{sen} [u(x)]$$

Ejemplos:

- Sea $y = \cos^5 x$; entonces haciendo $\cos x = f(x)$ resulta $y = f^5(x)$, de donde $y' = 5f^4(x) f'(x) = -5 \cos^4 x \operatorname{sen} x$.
- Para derivar la función $y = \cos(e^x + 8x^2)$ hacemos $u(x) = e^x + 8x^2$, y se tiene:

$$y' = u'(x) \operatorname{sen} [u(x)] = -(e^x + 16x) \operatorname{sen} (e^x + 8x^2)$$

5.6. *Derivada de* $y = \operatorname{tg} x$

La función $y = \operatorname{tg} x$ *es derivable en todo punto* x *tal que* $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, *con* $k \in \mathbb{Z}$, *y se verifica:*

$$\mathbf{y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

En efecto: $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es el cociente de dos funciones derivables en $\mathbb{R}$, luego es derivable en todos los puntos de $\mathbb{R}$ excepto en los que se anula el denominador y estos puntos son los x de la forma $(2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$

Si $x \neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, aplicando la Regla de derivación del cociente se tiene:

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

5.7. *Sea* $u:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *una función derivable en* $]a, b[$; *entonces la función* $y = \operatorname{tg} [u(x)]$ *es derivable en aquellos puntos* $x \in]a, b[$ *tales que* $u(x) \neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, *con* $k \in \mathbb{Z}$, *y se verifica:*

$$\mathbf{y' = \frac{u'(x)}{\cos^2 [u(x)]} = u'(x)\,(1 + \operatorname{tg}^2 [u(x)])}$$

24. Halla la derivada de las funciones:

a) $y = \cos^3 (x^2 + 6)$

b) $y = 6 \cos^2 x + 8 \operatorname{sen} x \cos x + 4 \operatorname{sen}^3 (3x + 1)$

c) $y = 6 \cos^3 x + 8 \cos^2 x + 9 \cos 3x + 10$

25. Halla la derivada en $x = 0$ de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos^2 (6x^3 + 1)$

b) $y = 6 \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} (e^x + 8)$

c) $y = \cos (3 \operatorname{sen}^2 x + 2)$

26. Halla la derivada de $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

27. Halla en $x_0 = 0$ la derivada de $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos e^x}$

En efecto: y es la composición

$$y: x \xrightarrow{u} u(x) = z \xrightarrow{v} v(z) = \operatorname{tg} z$$

Como u es derivable en $]a, b[$ y v es derivable en aquellos puntos en que $z \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ (por **5.6.**), entonces, por la Regla de la cadena, $y = v \cdot u$ es derivable en los puntos x tales que $z = u(x) \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, y se tiene:

$$y' = u'(x) \cdot v'(z) = u'(x) \cdot \frac{1}{\cos^2 z} = \frac{u'(x)}{\cos^2 [u(x)]}$$

Ejemplos:

- Si $y = \operatorname{tg}(e^x + 3x^2)$, haciendo $u(x) = e^x + 3x^2$, resulta:

$$y' = \frac{u'(x)}{\cos^2 [u(x)]} = \frac{e^x + 6x}{\cos^2 (e^x + 3x^2)}$$

- Sea $y = \operatorname{tg}^4 (e^x + \operatorname{sen} x)$; y es la composición

$$y: x \xrightarrow{u} u(x) = e^x + \operatorname{sen} x = z \xrightarrow{v} v(z) = \operatorname{tg} z = t \xrightarrow{w} w(t) = t^4,$$

entonces, por la Regla de la cadena:

$$y' = u'(x) \cdot v'(z) \cdot w'(t) = (e^x + \cos x)\frac{1}{\cos^2 z} \cdot 4t^3 =$$

$$= \frac{e^x + \cos x}{\cos^2 (e^x + \operatorname{sen} x)} \cdot 4\operatorname{tg}^3 z = \frac{4(e^x + \cos x)\operatorname{tg}^3 (e^x + \operatorname{sen} x)}{\cos^2 (e^x + \operatorname{sen} x)}$$

5.8. *Derivada de $y = \operatorname{cosec} x$*

La función $y = \operatorname{cosec} x$ es derivable en todo $x \neq k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, y se verifica: $\mathbf{y' = -\cot x \cdot \operatorname{cosec} x}$.

En efecto: $y = \operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ es la función inversa de $\operatorname{sen} x$, luego es derivable en todos los puntos x tales que $\operatorname{sen} x \neq 0$, es decir, en aquellos puntos x tales que $x \neq k\pi$.

Aplicando la regla de derivación de la función inversa se tiene:

$$y' = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x \cdot \operatorname{cosec} x$$

5.9. *Si $u:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $]a, b[$, entonces la función $y = \operatorname{cosec}[u(x)]$ es derivable en todos los puntos $x \in]a, b[$ tales que $u(x) \neq k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, y se verifica:*

$$\mathbf{y' = -u'(x) \cdot \cot[u(x)] \operatorname{cosec}[u(x)]}$$

28. Halla la derivada de las funciones:

a) $y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$

b) $y = \operatorname{tg}^3 (e^{3x} + 8 \operatorname{sen} x)$

c) $y = 2\operatorname{tg}^2 x + 8x^2 \operatorname{tg}^3 (\sqrt{x^2 + 1})$

d) $y = \operatorname{tg}^3 (x^3 + 8x + 2)$

29. Halla la derivada de las funciones:

a) $y = x^3 + 8(x^2 - 1)^{-5} + 6L(\operatorname{tg} x)$

b) $y = x^3 + \operatorname{tg}(x^2 + 1) + L(\cos x)$

c) $y = \cos^2 (x^5 + 8x^3 + 1)$

d) $y = L\left(\operatorname{tg}(x + e^x)\right)$

30. Halla la derivada de la siguiente función

$$y = \sqrt{\operatorname{tg}^3 (x^2 + 5)}$$

Ejemplos:

- Sea $y = \operatorname{cosec}(3x^2 + e^x)$; llamando $u(x) = 3x^2 + e^x$, se tiene:

$$y' = -u'(x)\cot[u(x)]\operatorname{cosec}[u(x)] =$$
$$= -(6x + e^x)\cot(3x^2 + e^x)\operatorname{cosec}(3x^2 + e^x)$$

- Si $y = (\operatorname{cosec} x)^2$, entonces $y = [u(x)]^2$, donde $u(x) = \operatorname{cosec} x$, luego $y' = 2u(x)\cdot u'(x) = 2\operatorname{cosec} x[-\cot x \operatorname{cosec} x] =$
$= -2\operatorname{cosec}^2 x \cdot \cot x$.

5.10. *Derivada de* $y = \sec x$

La función $y = \sec x$ *es derivable en todo* $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, *con* $k \in \mathbb{Z}$, *y se verifica:* $\mathbf{y' = tg\ x \cdot sec\ x.}$

En efecto:

$y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, por tanto y es la función inversa de la función coseno, por tanto y es derivable en todos los puntos en que no se anula el denominador, pero $\cos x = 0$ si y sólo si $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, luego la función secante es derivable en aquellos puntos tales que $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$.

Aplicando la Regla de derivación de la función inversa, resulta:

$$y' = -\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$$

5.11. *Si* $u:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *es derivable en* $]a, b[$, *entonces la función* $y = \sec[u(x)]$ *es derivable en aquellos puntos* $x \neq (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$, *con* $k \in \mathbb{Z}$, *y se verifica:*

$$\mathbf{y' = u'(x)\cdot tg[u(x)]\cdot sec[u(x)]}$$

Ejemplos:

- Si $y = \sec^5 x$, escribiendo $\sec x = u$, $y = [u(x)]^5$, de donde:

$$y' = 5[u(x)]^4 u'(x) = 5\sec^4 x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \sec x = 5\sec^5 x \operatorname{tg} x$$

- Sea $y = \sec\sqrt{x^2 + e^x}$; haciendo $u(x) = \sqrt{x^2 + e^x}$, se tiene:

$y' = u'(x)\ \operatorname{tg}[u(x)]\cdot\sec[u(x)]$; como $u'(x) = \dfrac{2x + e^x}{2\sqrt{x^2 + e^x}}$, resulta:

$$y' = \frac{2x + e^x}{2\sqrt{x^2 + e^x}} \operatorname{tg}\left(\sqrt{x^2 + e^x}\right)\sec\left(\sqrt{x^2 + e^x}\right)$$

31. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{cosec}(L\sqrt{x^2 + 3})$

b) $y = \operatorname{cosec}^2(3x^6 + 5e^x)$

c) $y = e^x \operatorname{cosec}^3(x^2 + \sqrt{x})$

32. Demuestra, por aplicación de la Regla de la cadena, el teorema **5.9.**

33. Halla la derivada de las funciones:

a) $y = \sec^3(x^2 + 5e\sqrt{x})$

b) $y = \sec\left(x^2 + L(\operatorname{sen} x)\right)$

c) $y = \sec^4(x + \sqrt{x} + e^x + \operatorname{sen} x)$

34. Demuestra, aplicando la Regla de la cadena, el resultado **5.11.**

5.12. *Derivada de* $y = \cot x$

La función $y = \cot x$ *es derivable en todos los puntos* $x \neq k\pi$, *con* $k \in \mathbb{Z}$, *y se verifica:*

$$\mathbf{y' = \frac{-1}{sen^2\, x} = -(1 + \cot^2 x)}$$

En efecto: $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ es el cociente de dos funciones derivables, por lo tanto y será derivable en todos los puntos excepto en los que se anule el denominador, pero esto quiere decir que se anule el sen x, es decir, que x valga $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Aplicando la Regla de derivación del cociente:

$$y' = \frac{(-\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x) - (\cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

5.13. *Si* $u:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *es derivable en* $]a. b[$, *entonces la función* $y = \cot[u(x)]$ *es derivable en todos los puntos* $x \in]a, b[$ *tales que* $x \neq k\pi$, *con* $k \in \mathbb{Z}$, *y se verifica:*

$$\mathbf{y' = \frac{-u'(x)}{sen^2\,[u(x)]} = -u'(x)\,[1 + \cot^2\,[u(x)]]}$$

Ejemplo:

- Sea $y = \cot^3 (x^3 + 2e^x)$; y es la composición

  $y: x \xrightarrow{u} u(x) = x^3 + 2e^x = z \xrightarrow{v} V(z) =$

  $= \cot z = t \xrightarrow{w} w(t) = t^3$,

  entonces por la Regla de la cadena:

  $$y' = u'(x) \cdot v'(z) \cdot w'(t) = (3x^2 + 2e^x)\,\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 z} \cdot 3t^2 =$$

  $$= \frac{-(3x^2 + 2e^x)\,3\cot^2 z}{\operatorname{sen}^2 (x^3 + 2e^x)} = -\frac{3(3x^2 + 2e^x)\cot^2 (x^3 + 2e^x)}{\operatorname{sen}^2 (x^3 + 2e^x)}$$

35. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \cot^3 (e^x + 3\sqrt{x})$

b) $y = \cot (x^2 + 5x + 1)$

c) $y = \cot^4 (x^3 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})$

d) $y = \cot^n x$

36. Si $u(x)$ es una función derivable, halla la derivada de $y = (\cot [u(x)]^n)^m$.

6 Derivada de las funciones trigonométricas recíprocas

6.1. *La derivada de la función* $y = arc\ sen\ x$ *es* $\mathbf{y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$

En efecto: $y = \operatorname{arc\,sen} x$ es la recíproca de la función $x = \operatorname{sen} y$; recordando la Regla de derivación de la función recíproca, resulta: $y' = \dfrac{1}{x'} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

6.2. *Si u (x) es una función derivable, entonces la derivada de la función y = arc sen [u (x)] es:*

$$\mathbf{y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - [u(x)]^2}}}$$

Ejemplo:

- Sea $y = \text{arc sen } \sqrt{x^2 - 4}$; haciendo $u(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, se tiene: $u'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$, de donde

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4} \cdot \sqrt{1 - (x^2 - 4)}}$$

6.3. *La derivada de la función y = arc cos x es:* $\mathbf{y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}}$

En efecto: $y = \arccos x$ es la función recíproca de $x = \cos y$, luego: $y' = \dfrac{1}{x'} = \dfrac{1}{-\text{sen } y} = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

6.4. *Si u (x) es una función derivable, entonces la derivada de la función y = arc cos [u (x)] es:* $\mathbf{y' = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1 - [u(x)]^2}}}$

Ejemplo:

- La derivada de $y = \text{arc cos } e^x$ es: $y' = \dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1 - [u(x)]^2}}$,

  donde $u(x) = e^x$, y por tanto: $y' = \dfrac{-e^x}{\sqrt{1 - (e^x)^2}} = \dfrac{-e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

6.5. *La derivada de y = arc tg x es:* $\mathbf{y' = \frac{1}{1 + x^2}}$

En efecto: y es la recíproca de $x = \text{tg } y$, luego:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

6.6. *Si u (x) es una función derivable, entonces la derivada de y = arc tg [u (x)] es:*

$$\mathbf{y' = \frac{u'(x)}{1 + [u(x)]^2}}$$

Ejemplos:

- Sea $y = \text{arc tg } \sqrt{x}$; entonces poniendo $u(x) = \sqrt{x}$, se tiene $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, de donde $y' = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1 + (\sqrt{x})^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}$

37. Demuestra el resultado de **6.2.** utilizando la Regla de la cadena.

38. Halla la derivada de las funciones:

a) $y = \text{arc sen } \sqrt{x}$

b) $y = \text{arc sen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$

c) $y = \text{arc sen } e^x$

39. Demuestra el resultado de **6.4.** utilizando la Regla de la cadena.

40. Halla la derivada de las funciones:

a) $y = \text{arc cos } (x^3)$

b) $y = (\text{arc cos } e^x)^2$

c) $y = (\text{arc sen } e^x)(\text{arc cos } 3^x)$

d) $y = \text{arc cos}\sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$

41. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \text{arc tg } \sqrt{x^2 - 1}$

b) $y = \text{arc tg } \sqrt{\text{tg } (x^2 + 1)}$

c) $y = \text{arc tg } (e^x + 6x^2 - L\,x)$

d) $y = \sqrt{1 - (\text{arc tg } x)^2}$

e) $y = L\,(\text{arc tg } x)$

f) $y = x^2\,\text{arc}^2\text{tg } (x^2 + 1)$

42. Halla la derivada de $y = \text{arc sec } x$.

43. Halla la derivada de $y = \text{arc cosec } x$.

44. Procediendo como en **6.6.**, deduce la derivada de la función $y = \text{arc cot } x$.

45. Halla la derivada de $y = \text{arc cot}^3 x$.

CUADRO RESUMEN DE DERIVADAS

Funciones	Derivadas	Funciones	Derivadas
x^a, $a \in \mathbb{R}$	$a\,x^{a-1}$	$\cot u$	$-\dfrac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$
u^m, $m \in \mathbb{R}$	$mu^{m-1} \cdot u'$	$\sec x$	$\sec x \cdot \operatorname{tg} x$
Lx	$\dfrac{1}{x}$	$\sec u$	$u' \sec u \cdot \operatorname{tg} u$
Lu	$\dfrac{u'}{u}$	$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x} \log_a e$	$\operatorname{cosec} u$	$-u' \operatorname{cosec} u \cdot \cot u$
$\log_a u$	$\dfrac{u'}{u} \log_a e$	arc sen x	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
a^x	$a^x L\,a$	arc sen u	$\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
a^u	$a^u \cdot u' La$	arc cos x	$\dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$
e^x	e^x	arc cos u	$\dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
sen x	$\cos x$	arc tg x	$\dfrac{1}{1 + x^2}$
sen u	$u' \cdot \cos u$	arc tg u	$\dfrac{u'}{1 + u^2}$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$	arc cot x	$\dfrac{-1}{1 + x^2}$
$\cos u$	$-u' \operatorname{sen} u$	arc cot u	$\dfrac{-u'}{1 + u^2}$
tg x	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\begin{cases} y = f(x) \\ z = Ly \end{cases}$	$y' = y \cdot z'$
tg u	$\dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \operatorname{tg}^2 u)$		
cot x	$-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$		

Ejercicios y cuestiones

46. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^8 + 2x^2 - 5x + 4$

b) $y = (6x^5 + 4)^3$

c) $y = (x^2 + 8)^3 + (x - 4)^2 + 6x - 5$

d) $y = (x^6 + 6x^4 + 3x^2 - 1)^5$

47. ¿En qué puntos la tangente a la curva $y = 6x^3 + 9x - 2$ es paralela al eje OX?

48. Dada la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = (x^2 + 6)^3 + 3x^2 - 5$, halla $f'(-1)$, $f'(0)$ y $f'(1)$.

49. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = 3x^3 + 6(x - 1)^2 + 8x^2 + 3$ en el punto de abscisa 0.

50. Halla la derivada de las funciones:

a) $y = (x + 8)^{-2}$

b) $y = (x^2 + 4)^{-3} + (x^2 + 4)^{-2} + 1$

c) $y = \dfrac{1}{(x^6 + 8)^3}$

d) $y = \dfrac{3x^6 + 8}{(5x - 4)^4}$

51. Deriva: a) $y = L(x^2 + 3x - 1)$; b) $y = L(x^3 + (x^2 - 1)^4)$; c) $y = \sqrt{L(x^2 + 1)}$

52. Halla por derivación logarítmica:

a) $y = (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$ b) $y = (L\,x)^{Lx}$ c) $y = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

53. Obtén por derivación logarítmica la derivada de un cociente de funciones.

54. ¿Tiene en algún punto la curva $y = 3^x$ tangente paralela al eje OX?

55. Deriva: a) $y = 3^{x^3 + 5}$; b) $y = 5\sqrt{x}$; c) $y = 4^{\operatorname{sen} x} - 2e^{\operatorname{tg} x}$

56. Deriva: a) $y = x^{5/3}$; b) $y = (x^2 + 5)^{3/2}$; c) $y = (\operatorname{sen} x)^{4/5} + \cos(x^{4/5})$

57. Deriva:

a) $y = \operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x^2 + \cos x})$; b) $y = \operatorname{sen}(\operatorname{tg}\sqrt{x})$; c) $y = \operatorname{arc\,cos}(e^x + 5^x)$;

d) $y = \operatorname{arc\,cot} 3^x$; e) $y = \operatorname{arc\,cosec}(\sqrt{x^2 + \operatorname{sen} x})$; f) $y = \dfrac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}$

58. Deriva:

a) $y = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$; b) $y = \operatorname{arc\,sen}(x^2 + 6x - 1)$; c) $y = \operatorname{sen}\sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$.

Tema 15 ESTUDIO LOCAL DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

En este tema nuestro propósito es dar criterios que nos permitan determinar el comportamiento de una función en las proximidades de un punto mediante el conocimiento de la derivada de la función en dicho punto.

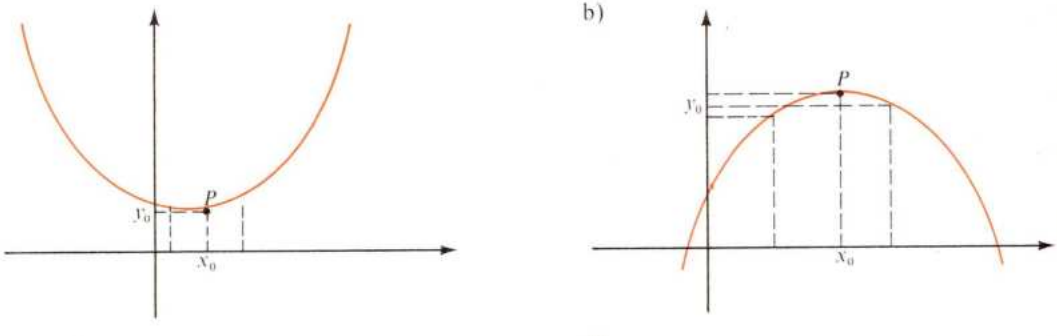
1 Crecimiento y decrecimiento de una función

1.1. Considera las funciones cuyas gráficas están dibujadas en la figura 1; a simple vista se observa que en las proximidades del punto $P(x_0, y_0)$ las tres gráficas presentan un comportamiento distinto.

En la gráfica a), la curva en los puntos próximos a P es tal que para valores de la abscisa próximos a x_0 y *menores* que x_0 la ordenada toma valores *menores* que y_0, mientras que para valores *mayores* que x_0 la ordenada toma valores *mayores* que y_0.

En la gráfica b) ocurre justamente lo contrario; para valores de la abscisa próximos a x_0 y *menores* que x_0 la ordenada correspondiente toma valores *mayores* que y_0, mientras que para valores de la abscisa *mayores* que x_0 la ordenada toma valores *menores* que y_0.

Finalmente, en las gráficas c) y d) la curva toma en las proximidades de x_0 *siempre valores mayores que* y_0 en c), y *siempre menores que* y_0 en d).



(Fig. 1)

1.2. Considera la función f cuya gráfica es la de la figura 2 y el punto $P(x_0, y_0)$; si tomamos el entorno E de x_0, indicado en la figura, vemos que en ese entorno, si $x < x_0$, entonces $f(x) < f(x_0) = y_0$, y si $x_0 < x$, entonces $y_0 = f(x_0) < f(x)$. Una función f de este tipo se dice que es creciente en x_0.

De una manera formal damos la siguiente definición:

Sea $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in]a, b[$; *se dice que* f *es creciente en* x_0 *si existe un entorno de* x_0, $E =]x_0 - h, x_0 + h[$, *tal que*
si $x_0 - h < x < x_0$, *entonces* $f(x) < f(x_0)$ *y*
si $x_0 < x < x_0 + h$, *entonces* $f(x_0) < f(x)$.

Ejemplos:

- Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$; veamos que f es creciente en $x = 1$.

  Tomemos el entorno de 1, $E =]0,2[$; entonces si $0 < x < 1$, $f(x) = x^2 < 1 = f(1)$, y si $1 < x < 2$, es $1 = f(1) < f(x) = x^2$. $= f(1) < f(x) = x^2$.

- La función anterior $f(x) = x^2$ *no* es creciente en $x_0 = 0$, ya que si tomamos un entorno de 0, entonces, si $h < 0$, se tiene $f(0) = 0 < h^2 = f(h)$ (ya que el cuadrado de todo número real es positivo).

1.3. *Si una función* $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *es derivable en* $x_0 \in]a, b[$ *y si* $f'(x_0) > 0$, *entonces* f *es creciente en* x_0.

Sabemos que $f'(x_0) = \lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Si $f'(x_0) > 0$, entonces existe un entorno E de x_0 en el que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tiene el mismo signo que el límite, es decir: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$,

luego $f(x) - f(x_0)$ y $x - x_0$ tienen el mismo signo en E.

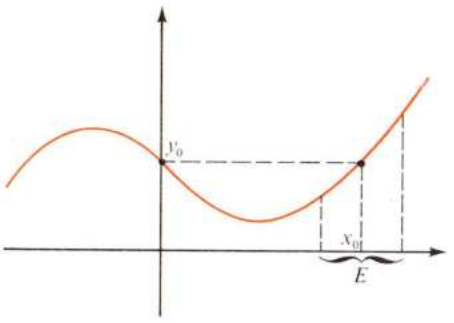
Por tanto:

si $x < x_0$, entonces $x - x_0 < 0$ y $f(x) - f(x_0) < 0$, luego $f(x) < f(x_0)$
si $x_0 < x$, entonces $x - x_0 > 0$ y $f(x) - f(x_0) > 0$, luego $f(x_0) > f(x_0)$ y f es creciente.

Ejemplos:

- La función $y = x^3 + 6x - 2$ es creciente en $x = 0$, pues $y' = 3x^2 + 6$ e $y'(0) = 6 > 0$.

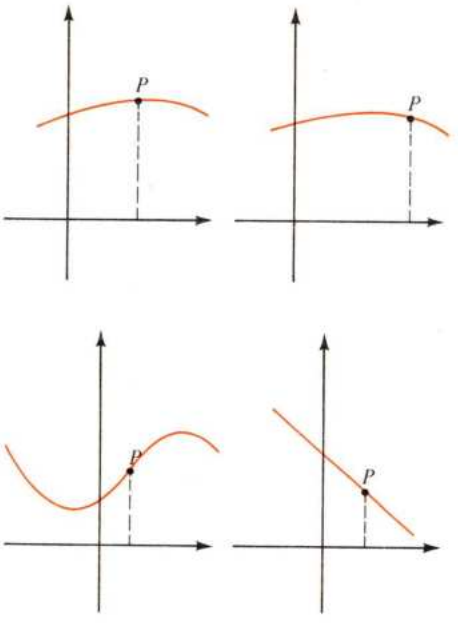
- La función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -4x^2 + 8x - 3$ es creciente en $x = -3$, pues $f'(x) = -8x + 8$ y $f'(-3) = = (-8)(-3) + 8 = 32 > 0$.



(Fig. 2)

Ejercicios:

1. Se consideran las funciones cuyas gráficas son las siguientes. Indica cuáles son crecientes y cuáles decrecientes en el punto P.



2. Demuestra que la función lineal $f(x) = = ax + b$ es creciente en x_o si y sólo si $a > 0$. (No utilizar el criterio de la derivada).

3. ¿Es creciente la función $y = -x^3$ en $x = 1$?

4. Si una función f es tal que $f'(x_0) > 0$, ¿es creciente en x_0?

Notas:

a) Es importante señalar que el teorema anterior da una condición suficiente pero no necesaria para que una función sea creciente en un punto x_0; es decir, si $f'(x_0) > 0$, entonces f es creciente en x_0, pero *f' puede ser creciente en x_0 y no ser $f'(x_0) > 0$.*

Por ejemplo: la función $f(x) = x^3$ es creciente en $x_0 = 0$, ya que si $x < 0$ entonces $x^3 < 0$, es decir, $f(x) < f(0)$, y si $x > 0$ entonces $x^3 > 0$, luego $f(x) > f(0)$ y por tanto f es creciente en $x_0 = 0$; sin embargo, $f'(x) = 3x^2$ y por tanto $f'(0) = 3 \cdot 0 = 0$, que *no* es positiva.

b) Si queremos hallar los puntos en que una función es creciente, tendremos que hallar su función derivada y ver para qué valores es positiva, estudiando después aquellos otros en que se anule, por si fuera también creciente allí.

Ejemplo:

- Sea $f(x) = x^2 + 4x - 3$; vamos a estudiar en qué puntos es creciente. Su derivada es $f'(x) = 2x + 4$; entonces para que $f'(x) > 0$ debe ser $2x + 4 > 0$, es decir, $2x > -4$ o, lo que es lo mismo, $x > -2$, luego f es creciente para $x > -2$.

1.4. Considera la función f cuya gráfica es la de la figura 3 y el punto $P(x_0, y_0)$ sobre ella; si tomamos el entorno E de x_0, marcado en la figura, vemos que para valores x de la abscisa pertenecientes a E y *menores* que x_0 las ordenadas correspondientes son *mayores* que $y_0 = f(x_0)$, y para valores x de la abscisa pertenecientes a E y *mayores* que x_0 las ordenadas correspondientes son *menores* que $y_0 = f(x_0)$; esto se expresa diciendo que la función *f es decreciente en el punto x_0*.

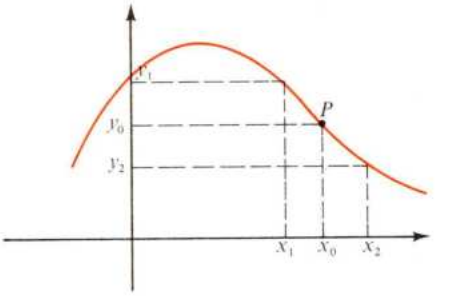
Una función $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *decreciente en $x_0 \in]a, b[$ si existe un entorno E de x_0 tal que si $x \in E$ y $x < x_0$ entonces $f(x) > f(x_0)$*, y si $x \in E$ y $x_0 < x$ entonces $f(x_0) < f(x)$.

Ejemplo:

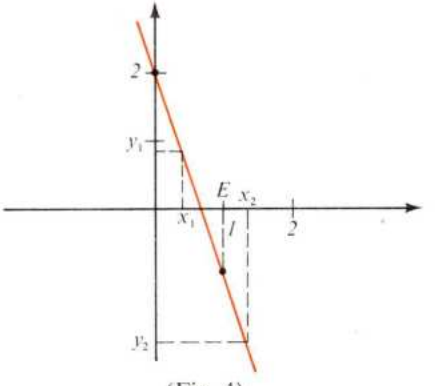
- La función $f(x) = -3x + 2$ es decreciente en $x_0 = 1$. En efecto: tomemos el entorno $E =]0,2[$ (Fig. 4), entonces si $x \in E$ y $x < 1$ se tiene $-3 < -3x$, luego $f(1) = -3 + 2 = -1 < -3x + 2 = f(x)$, es decir, $f(x) > f(1)$, y si $x \in E$ y $1 < x$, entonces $-3x < -3$, luego $-3x + 2 = < -3 + 2 = -1 = f(1)$, es decir, $f(x) < f(1)$.

1.5. *Si una función $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $x_0 \in]a, b[$ y si $f'(x_0) < 0$, entonces f es decreciente en x_0.*

La demostración es análoga a la del apartado **1.2.**, y la dejamos como ejercicio.



(Fig. 3)



(Fig. 4)

5. Estudia si son crecientes en los puntos que se indican las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x + 2$ en $(0,2)$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $(-1, -1)$

c) $f(x) = \dfrac{2x + 4}{3x - 1}$ en $(0, -4)$

d) $f(x) = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$ en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

6. Halla para qué valores de x es decreciente la función $f(x) = 6x^3 - 8x$.

7. Halla los intervalos en que es creciente la función $y = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$

8. Demuestra que si n es un número natural par entonces $y = x^n$ es decreciente en $x_o = -1$

Ejemplo:

- Veamos en qué puntos es decreciente $f(x) = x^2 - 3x + 8$. Para ello calcularemos su derivada y luego hallaremos para qué valores es negativa dicha derivada: $f'(x) = 2x - 3$

  Para que $f'(x) < 0$ debe ser $2x - 3 < 0$, es decir, $2x < 3$, y por tanto $x < \frac{3}{2}$, luego f es decreciente para $x < \frac{3}{2}$.

Nota: Igual que sucede en **1.2.**, el teorema **1.5.** nos da una condición suficiente para que una función sea decreciente en un punto, pero *una función puede ser decreciente en un punto y su derivada no ser negativa,* mas entonces tiene que ser nula, pues, si fuera positiva, la función sería creciente.

Ejemplo:

- Sea $f(x) = -x^5$; entonces f es decreciente en $x_0 = 0$, pues si $x < 0$ entonces $x^5 < 0$, luego $-x^5 > 0$, es decir, $f(x) > f(0)$, y análogamente: si $x > 0$, entonces $x^5 > 0$, luego $-x^5 < 0$, es decir, $f(x) < f(0)$.

  Sin embargo, $f'(x) = -5x^4$, por tanto, $f'(0) = 0$, que *no* es negativa.

1.6. Resumiendo:

Si $f'(x_0) > 0$, f es creciente en x_0.

Si $f'(x_0) < 0$, f es decreciente en x_0.

Si $f'(x_0) = 0$, no se puede afirmar nada sobre el crecimiento o decrecimiento de f en x_0.

En este último caso, para ver si f es creciente o decreciente debemos estudiar qué sucede en las proximidades de x_0, como se indica en los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

- Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; veamos si f es creciente en $x_0 = 1$. Aplicando el criterio de la derivada, se tiene: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ y $f'(1) = 0$, luego no podemos deducir nada por este método.

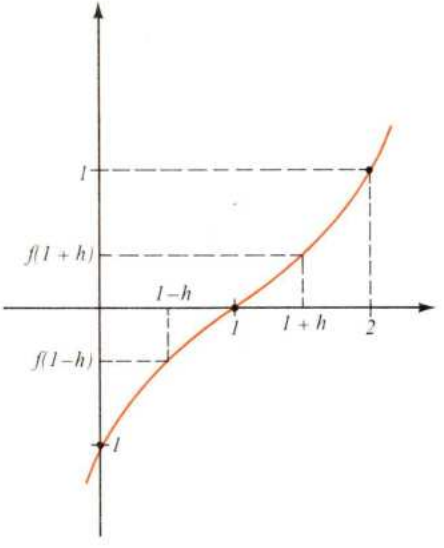
  Vamos a considerar valores muy próximos a 1, es decir, puntos de abscisa $1 - h$ y $1 + h$; cuando $h > 0$ es pequeño, se tiene:

  $$f(1-h) = (1-h)^3 - 3(1-h)^2 + 3(1-h) - 1 = -h^3$$

  $$f(1+h) = (1+h)^3 - 3(1+h)^2 + 3(1+h) - 1 = h^3,$$

  entonces $f(1-h) = -h^3 < f(1) = 0$ y $f(1+h) = h^3 > f(1) = 0$,

  luego f es creciente en $x_0 = 1$ (Fig. 5).



(Fig. 5)

9. Demuestra que si n es un número natural impar, entonces $y = x^n$ es creciente en cualquier punto $x_o < 0$.

10. Estudia el crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 - 8x + 4$ en $(3, -11)$

b) $y = -6x^3$ en $(0,0)$

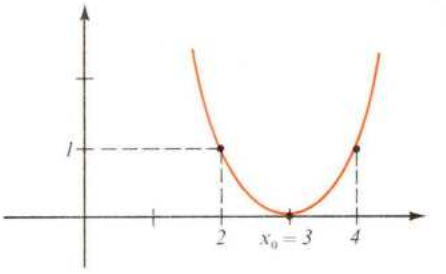
11. Indica en qué intervalos es creciente o decreciente la función $y = x^2 - 6x + 8$.

• Consideremos la función $f(x) = x^2 - 6x + 9$ y vamos a estudiarla en $x_0 = 3$. Aplicando el criterio de la derivada, se tiene $f'(x) = 2x - 6$ y $f'(3) = 0$, es decir, que no podemos deducir nada de la información que nos suministra la derivada.

Vamos a ver qué sucede en puntos próximos a $x_0 = 3$, es decir, en puntos de la forma $3 - h$ y $3 + h$; se tiene:

$$f(3 - h) = (3 - h)^2 - 6(3 - h) + 9 = h^2$$
$$f(3 + h) = (3 + h)^2 - 6(3 + h) + 9 = h^2$$

Como $f(3) = 0$, se tiene $f(3 - h) > f(3)$ y $f(3 + h) > f(3)$, luego f *no* es creciente *ni* decreciente en $x_0 = 3$ (Fig. 6).



(Fig. 6)

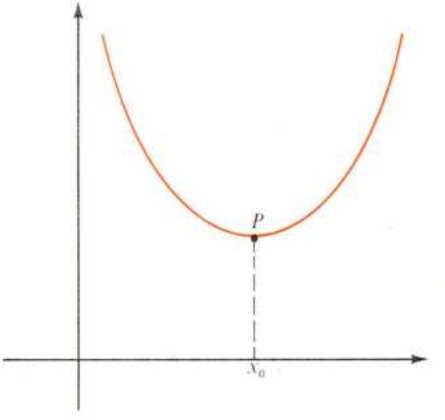
2 Máximos y mínimos de una función

Vamos a estudiar el caso de funciones cuyas gráficas presentan puntos P como los de las figuras 7 y 8; en ambas es fácil ver que la función no es creciente ni decreciente en P.

Lo más significativo de estos puntos es que para valores próximos a x_0 en el primer caso la función toma siempre valores mayores que en x_0, y en el segundo, menores que en x_0; esto lo indicaremos diciendo que la función posee en x_0 un mínimo o un máximo, según sea el caso de la figura 7 o el de la 8.

Explícitamente:

2.1. *Una función* $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *tiene un mínimo relativo en* $x_0 \in]a, b[$ *si existe un entorno* E *de* x_0 *tal que* $\forall\ x \in E$ $f(x_0) \leqslant f(x)$.

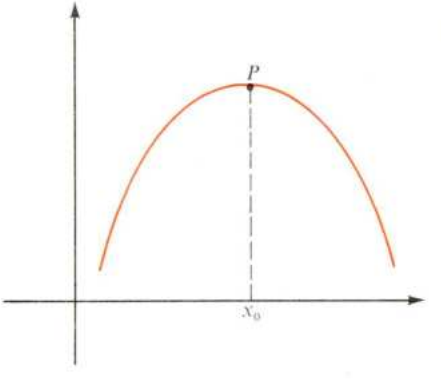


(Fig. 7)

Ejemplo:

• La función $f(x) = x^2$ tiene un mínimo en $x_0 = 0$. En efecto: sea el entorno $]-1,1[$ de 0; si $x \in]-1,1[$, $f(x) = x^2 \geqslant 0 = f(0)$.

2.2. *Una función* $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *se dice que posee un máximo relativo en* $x_0 \in]a, b[$ *si existe un entorno* E *de* x_0 *tal que* $\forall\ x \in E\ f(x) \leqslant f(x_0)$.



(Fig. 8)

Ejemplo:

• Sea $f(x) = -2x^2 + 8x$; entonces f tiene un máximo en $x_0 = 2$. En efecto: tomemos el entorno $]1,3[$ de 2; entonces si $x \in]1,3[$, x es de la forma $2 - h$ o $2 + h$ con $0 \leqslant h < 1$, y se tiene:

$$f(2) = 8$$
$$f(2 - h) = -2(2 - h)^2 + 8(2 - h) = -2h^2 + 8 \leqslant f(2) = 8$$
$$f(2 + h) = -2(2 + h)^2 + 8(2 + h) = -2h^2 + 8 \leqslant f(2) = 8,$$

luego $x_0 = 2$ es un máximo de f.

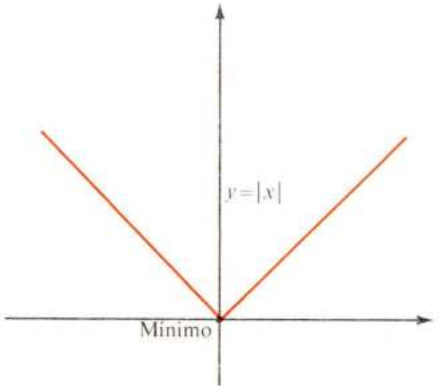
2.3. Sean $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in]a, b[$; entonces se dice que f posee un extremo en x_0 si f tiene un máximo o un mínimo en x_0.

2.4. Sean $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in]a, b[$; si f es derivable en x_0 y si x_0 es un extremo de f, entonces $f'(x_0) = 0$.

En efecto: si x_0 es un extremo de f, f tiene en x_0 un máximo o un mínimo, luego f *no* es creciente *ni* decreciente en x_0; por tanto, $f'(x_0)$ no puede ser positiva ni negativa, luego debe ser $f'(x_0) = 0$.

Notas:

a) Observa que en el teorema **2.4.** se exige que f sea derivable; no obstante, una función puede tener máximo o mínimo en un punto y *no* ser derivable en dicho punto. Por ejemplo, la función $y = |x|$ *no* es derivable en $x_0 = 0$ y sin embargo tiene un mínimo en $x_0 = 0$ (Fig. 9).



(Fig. 9)

b) Observa que la condición $f'(x_0) = 0$ es necesaria para la existencia de extremos, pero no es suficiente, es decir, *puede ser* $f'(x_0) = 0$ *y sin embargo* f *no tener un extremo en* x_0. Ejemplo de esto se tiene en la función $f(x) = x^3$, en la que $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 3 \cdot 0 = 0$; sin embargo ya hemos visto que esta función es *creciente* en $x_0 = 0$.

2.5. El resultado **2.4.** nos indica un método para buscar los extremos de una función f.

El método a seguir es el siguiente:

a) Se calcula $f'(x)$.

b) Se hallan valores de x que verifican $f'(x) = 0$.

c) Los valores hallados corresponden a *posibles* extremos; para determinar si lo son o no, y en caso de serlo si corresponden a máximo o mínimo, debemos hacer un estudio detallado de la función en las proximidades de cada uno de ellos.

Ejemplos:

- Consideremos $y = f(x) = x^3 + 4x - 2$. Vamos a encontrar los extremos de f.

  a) Derivada de f: $y' = 3x^2 + 4$

  b) $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4 = 0$; esta ecuación no tiene solución, luego f no tiene extremos.

• Sea $y = f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x$

a) Derivada de f: $y' = 3x^2 - 9x + 6$

b) $y' = 0 \Rightarrow x = 1 \quad y \quad x = 2$

c) Estudio de f en las proximidades de $x = 1$: $f(1) = \frac{5}{2}$

$$\text{Sea } h > 0,\ f(1-h) = (1-h)^3 - \frac{9}{2}(1-h)^2 + 6(1-h) =$$

$$= \frac{5}{2} - h^2\left(h + \frac{3}{2}\right) < \frac{5}{2} = f(1)$$

$$f(1+h) = (1+h)^3 - \frac{9}{2}(1+h)^2 + 6(1+h) =$$

$$= \frac{5}{2} + h^2\left(h - \frac{3}{2}\right) < \frac{5}{2} = f(1),$$

ya que el signo del paréntesis para h pequeño es negativo.

Por tanto, $x = 1$ corresponde a un máximo; el punto correspondiente en la gráfica será $\left(1, \frac{5}{2}\right)$

d) Estudio de f en las proximidades del punto $x = 2$: $f(2) = 2$

$$\text{Sea } h > 0,\ f(2-h) = (2-h)^3 - \frac{9}{2}(2-h)^2 + 6(2-h) =$$

$$= 2 + h^2\left(\frac{3}{2} - h\right); \text{ para } h \text{ pequeño } \frac{3}{2} - h > 0,$$

$$\text{luego } f(2-h) > f(2) \quad |1|$$

$$f(2+h) = (2+h)^3 - \frac{9}{2}(2+h)^2 + 6(2+h) =$$

$$= 2 + h^2\left(\frac{3}{2} + h\right), \text{ de donde:}$$

$$f(2+h) > f(2) \quad |2|$$

De |1| y |2| se sigue que $x = 2$ corresponde a un máximo; el punto correspondiente en la gráfica será (2,2).

Aunque en teoría el estudio del comportamiento de la función en las proximidades del punto nos resuelve la cuestión relativa a los extremos de la función, en la práctica si la función es complicada este método es largo y enojoso. El estudio de la derivada segunda nos permite abordar el problema de un modo más sencillo.

2.6. Sea $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuya derivada se anula en $x_0 \in]a, b[$ y tal que en un entorno de x_0, $f'(x_0) \neq 0$ y $f''(x_0) \neq 0$; entonces

a) si $f''(x_0) < 0$, f tiene un máximo en x_0.

b) si $f''(x_0) > 0$, f tiene un mínimo en x_0.

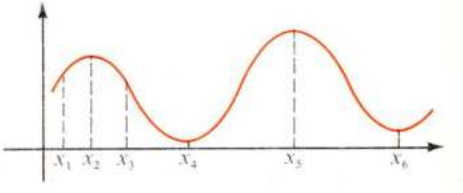
12. Demuestra que la función $y = x^2 + 3x$ posee un mínimo en $x_0 = -\frac{3}{2}$

13. Demuestra que la función $y = 3x + 4$ no posee extremos.

14. Determina una función que posea un máximo y que no sea derivable en dicho punto.

15. Escribe una función f para la que exista un punto x_0 tal que $f'(x_0) = 0$ y sin embargo x_0 no sea un extremo.

16. Indica los extremos de la función cuya gráfica es:



diciendo si corresponden a máximos o mínimos.

17. ¿Qué se puede decir de la función $-f$ si f posee un máximo en x_0?

18. Estudia los extremos de las funciones:

a) $y = x + 4$

b) $y = 2x^2 - 4x + 1$

c) $y = x^3 + x^2 - x$

d) $y = \frac{1}{x}$

Para comprobar a) supongamos que $f''(x_0) < 0$, entonces la función $y' = f'(x)$ es decreciente en x_0, puesto que la derivada de esta función es negativa en x_0; como $f'(x_0) = 0$, y hemos visto que es decreciente, será $f'(x_0 - h) > 0$ y $f'(x_0 + h) < 0$ (Fig. 10), luego f es creciente en los puntos $x_0 - h$ y decreciente en los $x_0 + h$; por tanto, x_0 es un máximo de f. La demostración de b) es análoga y la dejamos como ejercicio.

Ejemplos:

- Sea $y = x^3 - 2x$; vamos a hallar los extremos de la función:

  a) $y' = 3x^2 - 2$

  b) $y' = 0 \Rightarrow x = +\sqrt{2/3}, x = -\sqrt{2/3}$

  c) Calculemos la segunda derivada $y'' = 6x$

  $y''\left(\sqrt{2/3}\right) = 6\sqrt{2/3} > 0 \Rightarrow$ y tiene un mínimo en $\sqrt{2/3}$

  $y''\left(-\sqrt{2/3}\right) = -6\sqrt{2/3} < 0 \Rightarrow$ y tiene un máximo en $-\sqrt{2/3}$.

- La función $f(x) = y = x^2 + px + q$ presenta un mínimo -16 para $x = 2$. Determinemos p y q.

  La derivada y' es: $f(x) = y' = 2x + p$

  Como f' se anula para $x = 2$: $f'(2) = 0 = 2 \cdot 2 + p \Rightarrow p = -4$

  Como $f(2) = -16$, se tiene: $f(2) = -16 = 2^2 - 4 \cdot 2 + q \Rightarrow q = -12$

2.7. Resumiendo: para calcular los extremos de una función f se procede de la siguiente forma:

a) Se calcula $f'(x)$.

b) Se hallan los valores de x tales que $f'(x) = 0$.

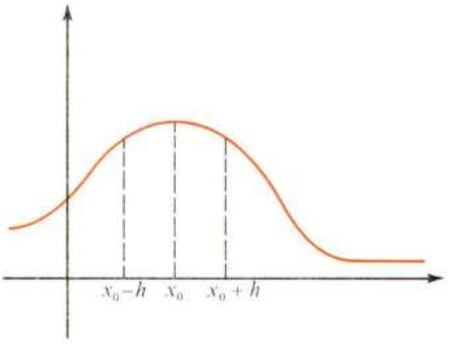
c) Se calcula $f''(x)$.

d) Para cada valor de x_0 que anula la primera derivada calculamos $f''(x_0)$.

- Si $f''(x_0) > 0$, f tiene en x_0 un mínimo.
- Si $f''(x_0) < 0$, f tiene en x_0 un máximo.
- Si $f''(x_0) = 0$, no se puede decir nada de x_0 (Caso dudoso).

Nota: A veces ocurre que la función f' derivada de f es el cociente de dos funciones: $f'(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$. Si además $f_2(x) > 0$, se puede simplificar el cálculo de los extremos de f. Los extremos de f se obtienen haciendo $f'(x) = 0$, es decir, $f_1(x) = 0$.

Como $f'' = \dfrac{f_1' \cdot f_2 - f_1 \cdot f_2'}{f_2^2}$, al ser $f_1 = 0$ se tiene: $f'' = \dfrac{f_1' \cdot f_2}{f_2^2} = \dfrac{f_1'}{f_2}$, y siendo $f_2 > 0$, el signo de f'' coincide con el signo de f_1'.



(Fig. 10)

19. Demuestra el apartado b) de **2.6.** basándote en la demostración análoga de a) dada en el texto.

20. Halla los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 5x - 3$

b) $y = 3x^3 + 4x - 1$

c) $y = x^3 - x + 1$

d) $y = (x-3)(x+2)(x-1)$

e) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

f) $y = \operatorname{sen} x$

21. Sea $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que toma valores positivos; sea x_0 un punto tal que $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$.

Demuestra que x_0 es un mínimo de la función $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

Ejemplo:

- Sea la función f: $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{400x^2 - x^4}$

$$f'(x) = \frac{800x - 4x^3}{2\sqrt{400x^2 - x^4}} = \frac{400x - 2x^3}{x\sqrt{400 - x^2}} = \frac{400 - 2x^2}{\sqrt{400 - x^2}} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 400 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 10\sqrt{2}$

Como $f_2(x) > 0$, el signo de $f''(x)$ será igual al signo de $f_1'(x)$, $f_1'(x) = -4x$; y para todo $x > 0$ es $-4x < 0$, por tanto la función f tiene un máximo para $x = 10\sqrt{2}$, $f(10\sqrt{2}) = 200$; luego el punto máximo es $(10\sqrt{2}, 200)$.

22. Aplicando el resultado anterior, halla los máximos y mínimos de $y = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.

23. Halla los máximos y mínimos de las funciones:

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

b) $y = \dfrac{x}{Lx}$

c) $y = \text{sen}\,(2x + 5)$

24. La función $y = x^3 + p\,x^2 + q$ tiene un valor mínimo 3 para $x = 2$.

Halla p y q.

25. Halla a, b, c y d en la función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para que tenga un máximo en $(-2,21)$ y un mínimo en $(1, -6)$.

3 Problemas relativos a máximos y mínimos

La teoría de máximos y mínimos permite resolver de un modo sencillo muchos problemas que se presentan en la práctica. Veamos a continuación algunos de ellos.

Ejemplo 1:

- Supongamos que se trata de hallar dos números cuya suma sea 14 y su producto el mayor posible.

Sean x e y los dos números; su suma debe ser 14, luego $14 = S = x + y$; el producto $P = xy$ debe ser máximo, por tanto debemos hallar los máximos de la función

$$P = x \cdot y$$

sujeta a la condición $x + y = 14$.

Se tiene $y = 14 - x$, de donde:

$$P(x) = x(14 - x) = 14x - x^2$$

Derivando $P'(x) = 14 - 2x$, $P'(x) = 0 \Rightarrow 14 - 2x = 0 \Rightarrow x = 7$

Veamos que esta solución corresponde a un máximo de P:

$P''(x) = -2 < 0$, luego $x = 7$ es un máximo.

Los números serán pues $x = 7$, $y = 14 - x = 7$

Ejemplo 2:

- Vamos a hallar el punto de la hipérbola $4x^2 - 3y^2 = 9$ más próximo al origen.

  Sea $P(x, y)$ el punto buscado; entonces se debe tener $4x^2 - 3y^2 = 9$; por otra parte, la distancia del origen (0, 0) a (x, y) es $d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

  Como $x^2 = \dfrac{9 + 3y^2}{4}$, se tiene:

$$d = \sqrt{\frac{9 + 3y^2}{4} + y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{9 + 7y^2}$$

  Tenemos que hallar y con la condición de que d sea un mínimo:

$$d' = \frac{1}{2} \quad \frac{14y}{2\sqrt{9 + 7y^2}} = \frac{7y}{2\sqrt{9 + 7y^2}} \text{ y } d' = 0 \Rightarrow y = 0$$

  Veamos que este valor corresponde a un mínimo:

$$d'' = \frac{7}{2} \frac{9 + 7y^2 - 7y}{(9 + 7y^2)\sqrt{9 + 7y^2}} \quad \text{y} \quad d''(0) = \frac{7}{6} > 0,$$

  luego es un mínimo y el punto P es (3/2,0) o (–3/2,0), pues $x = \sqrt{9 - 3y^2} = \pm\ 2/3$

Ejemplo 3:

- Con una placa rectangular de cartón se quiere construir una caja del máximo volumen posible cortando un cuadrado en cada esquina. Si las dimensiones de la placa son 50 cm y 30 cm, ¿qué dimensiones debe tener el lado del cuadrado que cortemos de la caja?

  En la figura 11 se indica la forma de construir la caja.

  Si x es la longitud del lado del cuadrado, x será entonces la profundidad de la caja. Lo que queremos es que el volumen sea máximo.

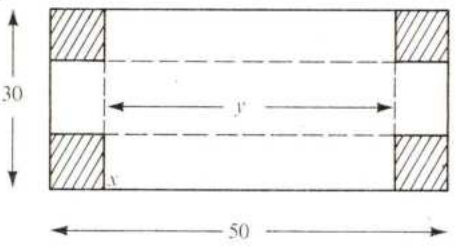
  El volumen de un paralelepípedo rectangular es: $V = x \cdot y \cdot z$ En nuestro caso:

$$y = 50 - 2x$$
$$z = 30 - 2x,$$

  luego $V = x(50 - 2x)\ (30 - 2x) = 1500x - 160x^2 + 4x^3$, y tenemos que buscar los valores de x correspondientes a máximos.

$$V' = 1500 - 320x + 12x^2$$
$$V' = 0 \Rightarrow 1500 - 320x + 12x^2 = 0,$$

  cuyas raíces son $x = \dfrac{40 + \sqrt{475}}{3}$ y $x = \dfrac{40 - \sqrt{475}}{3}$



(Fig. 11)

26. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 30 m de diámetro.

27. Halla un número positivo que sumado con su inverso dé una suma mínima.

28. Descompón un número N en dos sumandos x e y tales que la suma $x^2 + 6y$ sea mínima.

29. Un jardinero debe construir un parterre con forma de sector circular y de perímetro 100 m. ¿Cuál será el radio del parterre para que la superficie sea máxima?

30. Con una cuerda de 9 dam de longitud se desea cercar dos jardines: uno cuadrado y otro circular. Halla qué longitud se debe dar a cada trozo para que la suma de las superficies sea mínima.

31. Entre las rectas que pasan por el punto $P(1,2)$ halla la que forma con los ejes coordenados un triángulo de área máxima.

Como $V'' = -320 + 24x$, se tiene:

$$V''\left(\frac{40+\sqrt{475}}{3}\right) > 0 \quad \text{Mínimo}$$

$$V''\left(\frac{40-\sqrt{475}}{3}\right) < 0 \quad \text{Máximo}$$

Por tanto, el lado del cuadrado cortado debe ser:

$$x = \frac{40-\sqrt{475}}{3}\ \text{cm} \simeq 6'068$$

Ejemplo 4:

- Se quiere inscribir en una esfera de radio dado R un cono de volumen máximo. ¿Cuál será la altura del cono?

Las figuras 12 y 13 muestran el cono inscrito en la esfera y la sección diametral de la esfera y el cono respectivamente.

El volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; teniendo en cuenta el teorema de la altura en el triángulo PQS, se tiene:

$$r^2 = (2R-h)\,h,$$

de donde $V = \frac{1}{3}\pi(2R-h)h^2 = \frac{1}{3}\pi(2Rh^2-h^3)$

Tenemos que calcular h para que V sea máximo:

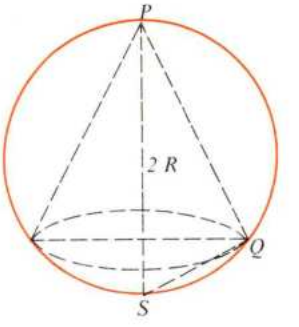
$$V' = \frac{1}{3}\pi(4Rh-3h^2) \text{ y } V' = 0 \Rightarrow h = 0 \quad \text{o} \quad h = \frac{4}{3}R$$

Como $V'' = \frac{1}{3}\pi(4R-6h)$, se tiene:

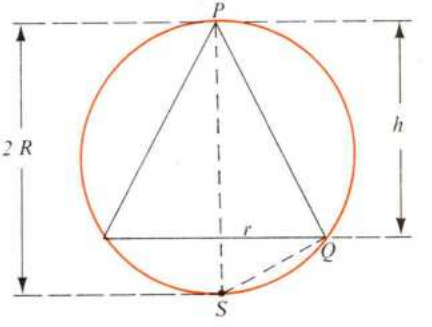
$$h = 0 \Rightarrow V'' = \frac{4}{3}\pi R > 0 \quad \text{Mínimo}$$

$$h = \frac{4}{3}R \Rightarrow V'' = -\frac{4}{3}\pi R < 0 \quad \text{Máximo}$$

Por tanto, la altura del cono debe ser: $h = \frac{4}{3}R$

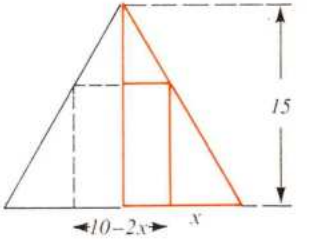


(Fig. 12)



(Fig. 13)

32. Halla las dimensiones del rectángulo de mayor área inscrito en un triángulo isósceles que tiene 10 m de base y 15 m de altura.



(Indicación: Observa que los triángulos marcado en color son semejantes).

33. Entre los rectángulos de 20 cm de perímetro halla el que tiene diagonal mínima.

4 Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

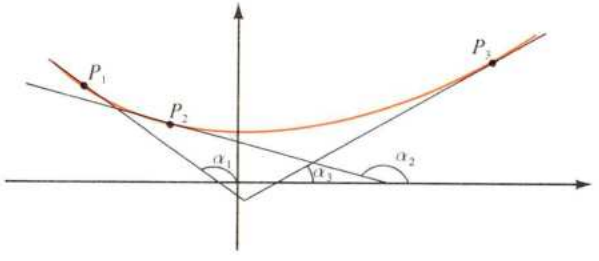
Observa las curvas de la figura 14 en la gráfica a); uniendo dos puntos cualesquiera, la secante queda por encima de los puntos de la curva, entre P y P', mientras que en b) sucede justamente lo contrario: la secante queda por debajo de la curva. Distinguiremos estos dos casos dando la siguiente definición.

4.1. Una función f es *convexa* o *cóncava hacia arriba* en el intervalo $]a, b[$ si $\forall\, x, x' \in]a, b[$, la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(x', f(x'))$ queda por encima de la gráfica de f en $]x, x'[$.

Una función f se dice *cóncava hacia abajo* en el intervalo $]a, b[$ si $\forall\, x, x' \in]a, b[$, la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(x', f(x'))$ queda por debajo de la gráfica de f en $]x, x'[$.

4.2. Si una función f es tal que $\forall\, x \in]a, b[$, $f''(x) > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba en $]a, b[$.

En efecto: la función $f'(x)$ es creciente en $]a, b[$, luego el ángulo que forma la tangente con el eje OX tiene tangente creciente y, por tanto, la gráfica de f debe ser la indicada en la figura 15; en consecuencia, f es cóncava hacia arriba en $]a, b[$.



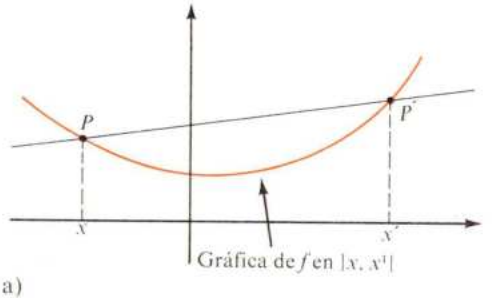
(Fig. 15)

Análogamente se prueba que:

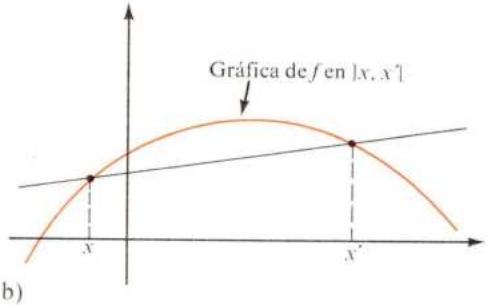
4.3. Si una función f es tal que $\forall\, x \in]a, b[$ es $f''(x) < 0$, entonces f es cóncava hacia abajo en $]a, b[$.

Ejemplos:

- La función $f(x) = x^2 + 3x - 1$ es cóncava hacia arriba en todo $\mathbb{R}$, pues $f'(x) = 2x + 3$ y $f''(x) = 2 > 0$.
- La función $f(x) = x^4$ es también cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$, pues $f'(x) = 4x^3$ y $f''(x) = 12x^2 > 0$ para $x \neq 0$.



a)



b)

(Fig. 14)

4.4. Si la función f es derivable en $]a, b[$, entonces gráficamente se ve que f es cóncava hacia arriba en $]a, b[$ si la gráfica de f queda por encima de la tangente en cada uno de los puntos de $]a, b[$, y es cóncava hacia abajo en $]a, b[$ si la gráfica de f queda por debajo de la tangente en cada uno de los puntos de $]a, b[$ (Fig. 16).

4.5. Un punto x_0 se dice de *inflexión de* f si la tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$ atraviesa la curva.

En la figura 17, el punto P es de inflexión, mientras que el Q no lo es.

Como en un punto de inflexión la curva pasa de ser cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba o viceversa, entonces $f''(x_0) = 0$. Sin embargo, esta condición no es suficiente; se puede demostrar, aunque no lo haremos en este curso, que si $f''(x_0) = 0$ y $f''(x_0) \neq 0$, entonces en el punto x_0 la función posee efectivamente una inflexión.

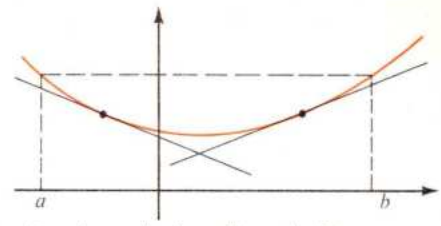
Ejemplos:

- Sea $f(x) = x^3$; entonces: $f'(x) = 3x^2$ y $f''(x) = 6x$.
  Veamos los valores que anulan la segunda derivada $6x = 0$; $x = 0$ luego si existe inflexión, ésta debe corresponder a $x = 0$; calculando la tercera derivada $f'''(0) = 6 \neq 0$, luego $x = 0$ es efectivamente una inflexión de f.

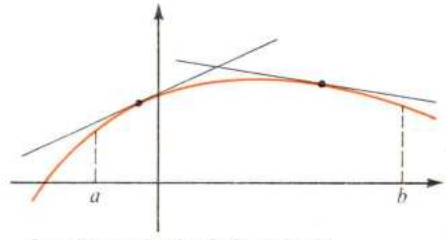
- Sea $f(x) = x^5 + 4$; entonces $f'(x) = 5x^4$ y $f''(x) = 20x^3$. Los posibles puntos de inflexión serán aquellos tales que $f''(x) = 0$, es decir, $x = 0$. Si hallamos la tercera derivada $f''(x) = 60x^2$, como $f'''(0) = 0$ *no* podemos decir que 0 sea una inflexión de f.

  Para estudiar los casos dudosos, como el de este ejemplo, observemos que si x_0 es una inflexión de f, la función en las proximidades de x_0 debe cambiar de concavidad.

  Tomemos entonces el intervalo $]-h, 0[$; en ese intervalo la función $f(x) = x^5 + 4$ es tal que si $x \in]-h, 0[$, $f''(x) = 20x^3 < 0$, luego en $]-h, 0[$ f es cóncava hacia abajo, por otra parte si $x \in]0, h[$, $f''(x) = 20x^3 > 0$, luego $]0, h[$ f es cóncava hacia arriba; por tanto en $x_0 = 0$, f cambia de concavidad, y en consecuencia en $x_0 = 0$, f tiene una inflexión.

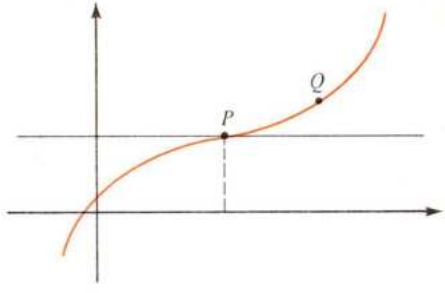


a) f es cóncava hacia arriba en $]a, b[$



b) f es cóncava hacia abajo en $]a, b[$

(Fig. 16)



(Fig. 17)

34. Halla los valores de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 24x$

b) $y = \operatorname{sen} 2x$

c) $y = 3x^2 + 4x - 1$

d) $y = 3^x$

35. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de las curvas:

a) $y = 6^x$

b) $y = L(2x)$

c) $y = 3x^2 + 6x - 1$

d) $y = x^3 + 3x^2 - 2x + 5$

36. Estudia los valores de inflexión de la función $y = x^7$.

Ejercicios y cuestiones

37. Si la función $y = f(x)$ es decreciente en el punto x_0, ¿puede ser $f'(x_0) > 0$? ¿$f'(x_0) < 0$? ¿$f'(x_0) = 0$?

38. ¿En qué puntos del intervalo $]0, \pi[$ es creciente la función $y = \operatorname{sen} x - \cos x$?

39. ¿Es creciente la función $y = 2x^3 - 3x + 4$ en $x_0 = 0$?

40. Estudia los puntos en que es creciente y decreciente la función $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

41. ¿La función $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2$ es creciente en $x_0 = 0$? ¿Y decreciente?

42. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,3) y por el máximo de la función $y = -x^2 + 6x + 2$

43. Halla los máximos y mínimos de las siguientes funciones.

a) $y = \dfrac{2}{x^2}$;

b) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;

c) $y = 4^x$;

d) $y = x^x$;

e) $y = L(x^2 + 1)$

f) $y = \operatorname{arc\,sen} x$

44. Halla los coeficientes a y b de la función $y = ax^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + bx + 8$, sabiendo que pasa por $\left(1, \dfrac{35}{6}\right)$ y que tiene un máximo para $x = -1$.

45. Demuestra que si una función tiene un máximo en x_0 y si $f(x_0) \neq 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces $\dfrac{1}{f}$ tiene un mínimo en x_0. Aplícalo para encontrar el mínimo de $y = \dfrac{1}{-x^2 + 6x - 3}$

46. Halla las coordenadas de los puntos de la curva $y^2 = 4x$ más próximos al punto (4,0).

47. Calcula los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3}$

b) $y = x^3 - 3x + 2$

48. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 4$, b) $y = x^3 - 2x^2 + 4$, c) $y = \dfrac{2}{x}$, d) $y = 5x^2$

49. Halla los puntos de inflexión de las curvas del problema anterior.

50. ¿Es el punto $x_0 = 0$ un punto de inflexión de la curva $y = x^7$?

Tema 16

REPRESENTACION GRAFICA DE FUNCIONES

En este tema vamos a aplicar los conceptos estudiados en el anterior (máximos, mínimos, etc.) para obtener de manera aproximada la gráfica de una función, lo que nos permitirá obtener información de su comportamiento general.

Nos limitaremos al estudio de las gráficas de funciones polinómicas sencillas y de funciones racionales (cocientes de funciones polinómicas).

1 Intervalos de existencia y regiones

Con objeto de estudiar una función real, en primer lugar debemos estudiar en qué puntos toma valores reales y no complejos, es decir, para qué valores de x existe $f(x)$.

Los intervalos en que está definida f se dicen los *intervalos de existencia.*

Ejemplos:

- Considera la función $y = \sqrt{x^2 - 6x}$; sabemos que, para que la raíz cuadrada sea un número real, el radicando debe ser positivo, así que y estará definida para aquellos x tales que $x^2 - 6x \geqslant 0$, es decir, $x(x - 6) \geqslant 0$.

$$x(x-6) \geqslant 0 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \text{y} \\ x - 6 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \text{y} \\ x \geqslant 6 \end{cases} \Rightarrow x \geqslant 6 \\ \text{o bien:} \\ \begin{cases} x \leqslant 0 \\ \text{y} \\ x - 6 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 0 \\ \text{y} \\ x \leqslant 6 \end{cases} \Rightarrow x \leqslant 0 \end{cases}$$

luego $x(x - 6) \geqslant 0$ si y sólo si $x \in]-\infty, 0[\cup]6, \infty[$.

Es decir, el intervalo de existencia de la función

$$y = \sqrt{x^2 - 6x} \text{ es }]-\infty, 0[\cup]6, \infty[$$

- Sea $y = L(x - 3)$; como la función logarítmica está definida sólo para valores positivos, y estará definida para aquellos x tales que $x - 3 > 0$, es decir, $x > 3$; luego el intervalo de definición es $]3, \infty[$.

Ejercicios:

1. Estudia los intervalos de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x-1}{x^2-4}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

c) $y = L(x^2 - 4)$

d) $y = e^{3x}$

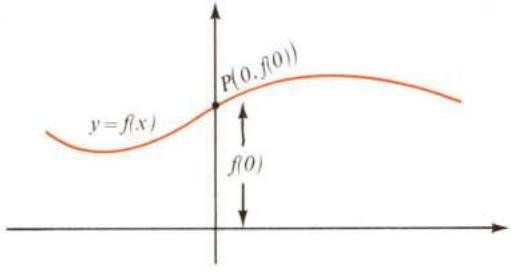
e) $y = \text{tg}(x + 5)$

2 Cortes a los ejes

2.1. *Corte al eje OY*

En general, los puntos de intersección de dos líneas se obtienen resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

Sea $y = f(x)$ una función; el punto en que la curva corta al eje OY se obtiene resolviendo el sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$ es decir, haciendo $x = 0$, en $y = f(x)$. El punto P de corte al eje OY es entonces $P(0, f(0))$ (Fig. 1).



(Fig. 1)

Ejemplos:

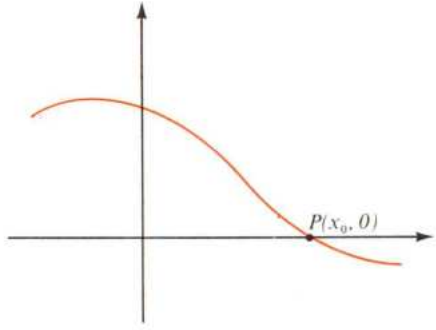
- La curva $y = \dfrac{1}{x}$ *no* corta al eje OY, pues para $x = 0$ la función no está definida.
- La curva $y = \operatorname{sen} x$ corta al eje OY en el punto $(0, 0)$.

2.2. *Cortes al eje OX*

Los puntos en que la curva corta al eje OX son aquellos en que la ordenada vale 0. Se obtienen estos puntos hallando los x tales que $f(x) = 0$. Si x_0 es una solución de la ecuación $f(x) = 0$, el punto $P\ (x_0, 0)$ es un punto de corte con el eje OX (Fig. 2).

Ejemplos:

- Para hallar los puntos de corte de la curva $y = x^2 + 2$ con el eje OX hacemos $y = 0$, es decir, $x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$. Esta igualdad no es posible ya que el cuadrado de un número real es siempre positivo, por tanto, la curva no corta al eje OX.
- Dada la parábola $y = x^2 - 4$, entonces $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = -2$, por tanto la curva corta al eje OX en dos puntos, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.



(Fig. 2)

2. Halla los puntos de corte con los ejes de las curvas representativas de las siguientes funciones:

a) $y = x$

b) $y = 6$

c) $y = x^2 + 5x + 6$

d) $y = (x - 1)(x - 3)(x + 5)$

e) $y = \dfrac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 5)(x + 3)^3}$

f) $y = \operatorname{sen}(3x + 2)$

3 Intervalos de crecimiento. Máximos y mínimos

3.1. Hemos visto en el tema anterior que si $f'(x_0) > 0$, f es creciente en x_0, y si $f'(x_0) < 0$, f es decreciente en x_0.

Para estudiar los intervalos en que f es creciente o decreciente hallaremos f' y estudiaremos la variación de su signo.

Los resultados los disponemos en un tabla así:

Intervalos	$-\infty < x < x_0$	$x_0 < x < x_1$	$---$	$x_n < x < \infty$
Signo de f'	$+$ o $-$	$+$ o $-$	$---$	
f es	creciente o decreciente	creciente o decreciente	$---$	

Ejemplos:

- Sea $y = x^2 + 8x - 1$; entonces $y' = 2x + 8$.

  $y' > 0$ si $2x + 8 > 0 \Rightarrow x > -4$

  $y' < 0$ si $2x + 8 < 0 \Rightarrow x < -4$

  Podemos formar la siguiente tabla:

Intervalos	$-\infty < x < -4$	$-4 < x < \infty$
Signo de f'	$-$	$+$
f es	decreciente	creciente

- Consideremos la función $y = x^3 - x + 2$, cuya derivada $y' = 3x^2 - 3$ se anula para $x = 1$ y $x = -1$.

  Para que $y' > 0$, debe ser $3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) > 0$.

  Es decir: $x^2 - 1 > 0$

  Si $|x| > 1$ es $x^2 > 1$, e $y' > 0$.

  Si $|x| < 1$ es $x^2 < 1$, e $y' < 0$.

  Luego se puede formar la siguiente tabla:

Intervalos	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Signo de f'	$+$	$-$	$+$
f es	creciente	decreciente	creciente

3. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $y = 6x - 1$

b) $y = -3x + 2$

c) $y = x^2 + 1$

d) $y = x^3 - x + 1$

e) $y = 6x^3 - 3x^2$

f) $y = (3x + 4)^2$

3.2. Hemos visto en el tema anterior que los máximos y mínimos de $y = f(x)$ corresponden a los valores x tales que $f'(x) = 0$.

Para el cálculo de los máximos y mínimos resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$; si x_0 es una solución de esta ecuación, se estudiará el signo de $f''(x_0)$ y pueden ocurrir tres casos:

1.º) que $f''(x_0) > 0$, entonces $(x_0, f(x_0))$ es mínimo,

2.º) que $f''(x_0) < 0$, entonces $(x_0, f(x_0))$ es máximo,

3.º) que $f''(x_0) = 0$, entonces se debe estudiar el comportamiento de la función en las proximidades de x_0 (ver tema anterior).

4. Halla los puntos correspondientes a máximos y mínimos de las siguientes funciones:

a) $y = 6x - 2$

b) $y = x^2 + 3$

c) $y = x^2 - x + 1$

d) $y = x^2 - 2x$

e) $y = \operatorname{sen} 3x$

f) $y = 3^{2x+1}$

g) $y = \dfrac{x-1}{x}$

4 Intervalos de concavidad

4.1. En el tema anterior hemos visto que los intervalos de concavidad hacia arriba corresponden a los intervalos $]a, b[$ tales que $f''(x) > 0$, $\forall\ x \in]a, b[$, y los de concavidad hacia abajo a aquellos $]a, b[$ tales que $f''(x) < 0$, $\forall\ x \in]a, b[$.

Para hallar estos intervalos hallamos los puntos en que $f''(x) = 0$ y estudiamos el signo de f'' en los intervalos determinados por estos puntos. Se tiene entonces la tabla:

Intervalos	$-\infty < x < x_0$	$x_0 < x < x_1$	
Signo de f''	$+$ o $-$	$+$ o $-$	...
f es	cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo	...

Ejemplos:

- En la función $y = x^3$, es $y' = 3x^2$ e $y'' = 6x$. Si $x > 0$, entonces $y'' > 0$, y si $x < 0$, entonces $y'' < 0$. Tenemos entonces la tabla:

Intervalos	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
Signo de f''	$-$	$+$
f es	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

5. Halla los intervalos en que las funciones son cóncavas hacia arriba o cóncavas hacia abajo.

a) $y = 3x^2$

b) $y = -6x^2 - 5x + 4$

c) $y = (2x + 3)^2$

d) $y = (x - 1)(x^2 + 2x + 3)$

e) $y = \operatorname{sen}(x + 1)$

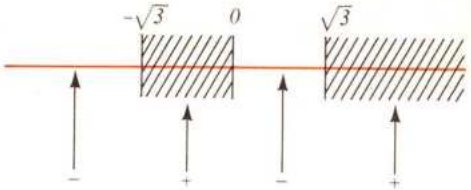
- Sea $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ entonces $y' = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$ e $y'' = \dfrac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$

  El denominador es siempre positivo, luego para estudiar el signo de y'' basta ver el signo del numerador:

  $$2x^3 - 6x = 2x(x^2-3) = 2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

  Tenemos los siguientes casos (Fig. 3):

Intervalos	$-\infty < x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$\sqrt{3} < x < \infty$
Signo de f''	$-$	$+$	$-$	$+$
f es	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba



Signo de $f'' = y'' = 2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

(Fig. 3)

4.2. Hemos visto en el tema anterior que los posibles puntos de inflexión de $y = f(x)$ son aquellos x tales que $f''(x) = 0$.

Los puntos de inflexión de la gráfica de f son aquellos x tales que $f''(x) = 0$. Para determinarlos seguiremos entonces los siguientes pasos:

a) calculamos $y'' = f''(x)$,

b) hallamos aquellos x_0 tales que $f''(x) = 0$,

c) si en estos puntos $f'''(x_0) \neq 0$, entonces $(x_0, f(x_0))$ es punto de inflexión.

d) si $f'''(x_0) = 0$, habrá que estudiar qué sucede en las proximidades de x_0, viendo si f pasa en este punto de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba o viceversa, en cuyo caso será punto de inflexión, o si no cambia, no lo será.

Ejemplos:

- Sea $y = \dfrac{1}{x}$; entonces $y' = \dfrac{1}{x^2}$ e $y'' = \dfrac{-2}{x^3}$. Como esta segunda derivada no se anula nunca, la función $y = \dfrac{1}{x}$ *no* posee puntos de inflexión.

- Sea $y = x^3 - 18$; entonces $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''' = 0 \Rightarrow x = 0$, luego en $x = 0$ *puede* existir un punto de inflexión.

  Como $y''' = 6 \neq 0$, entonces $x = 0$ es un punto de inflexión que corresponde a $(0, -18)$.

- Sea la función $f(x) = y = x^3 - 3x + 2$; entonces, $y' = 3x^2 - 3$, $y'' = 6x$; $6x = 0 \Rightarrow x = 0$.

  Como $y''' = 6 \neq 0$, resulta que en $x = 0$ hay un punto de inflexión que es $(0, f(0)) = (0, 2)$.

6. Halla los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 8x - 1$

b) $y = x^3 - 3x^2 + 8x - 1$

c) $y = x^3 + 3x + 1$

d) $y = \dfrac{2-x}{x+1}$

5 Reducción del dominio de una función

En muchas ocasiones el estudio de f puede reducirse a estudiarla en un subconjunto del conjunto donde está definida como función real. Los casos más importantes son:

5.1. *Simetría respecto al eje OY*

Una función $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es par y su gráfica *simétrica respecto al eje OY* si

a) $\forall\ \mathbf{x} \in]\mathbf{a}, \mathbf{b}[, -\mathbf{x} \in]\mathbf{a}, \mathbf{b}[$

b) $\mathbf{f(x) = f(-x)}$

Ejemplos:

- Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$; entonces $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{1}{x^2 - 1} = f(x)$, luego $\dfrac{1}{x^2 - 1}$ es simétrica respecto al eje OY.

- Sea $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$; entonces $f(-x) = \dfrac{1}{2(-x) - 1} = \dfrac{1}{-2x - 1} = \dfrac{-1}{(2x + 1)} \neq \dfrac{1}{2x - 1} = f(x)$, luego $f(x) = \dfrac{1}{2x - 1}$ *no* es simétrica respecto a OY.

Si la gráfica de la función f es simétrica respecto a OY y $P = (x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica, entonces $P' = (-x_0, y_0)$ pertenece también a la gráfica, luego la parte de curva correspondiente a las abscisas negativas es el reflejado, respecto al eje OY, de la parte correspondiente a las abscisas positivas (Fig. 4).

5.2. *Simetría respecto al origen*

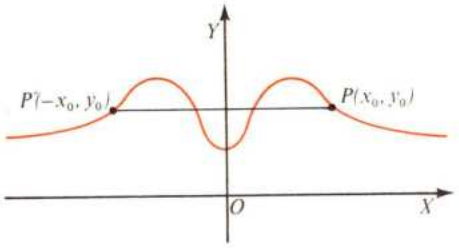
Una función $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es impar y su gráfica *simétrica respecto al origen* si

a) $\forall\ \mathbf{x} \in]\mathbf{a}, \mathbf{b}[, -\mathbf{x} \in]\mathbf{a}, \mathbf{b}[$

b) $\mathbf{f(-x) = -f(x)}$

Ejemplos:

- Si $f(x) = x^3$, entonces $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, luego la gráfica de f es simétrica respecto al origen.
- Sea $f(x) = x^3 + 1$; entonces $f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1 \neq -x^3 + 1 = f(x)$, luego la gráfica de f *no* es simétrica respecto al origen.



(Fig. 4)

7. Demuestra que si f y g son simétricas respecto a OY, entonces $f + g$ es simétrica respecto a OY. ¿Es cierto esto para $f - g$?

8. ¿Es cierto que el producto de dos funciones pares es par?

9. ¿Cuáles de las siguientes funciones son simétricas respecto a OY?

a) $y = 3x + 2$; b) $y = x$;

c) $y = x^6 + x^4 - 3x^2$; d) $y = x^2 - 1$

10. ¿Cuáles de las siguientes funciones son simétricas respecto a OY?

a) $y = \operatorname{sen}(2x + 3)$; b) $y = \dfrac{1}{x^2}$;

c) $y = \operatorname{tg} x$; d) $y = 3^{x^2}$

11. Demuestra que si f y g son simétricas respecto al origen, entonces $f + g$ también lo es. ¿Es cierto esto para $f - g$?

12. Demuestra que el producto de dos funciones simétricas respecto al origen es simétrico respecto al eje OY.

13. Halla cuáles de las siguientes funciones son simétricas respecto al origen:

a) $y = x$; b) $y = x^3 + x$;

c) $y = x^7$; d) $y = \dfrac{1}{x}$;

e) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - x}$; f) $y = \operatorname{sen} x^5$;

5.3. *Funciones periódicas*

Una función $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ se dice periódica si existe un número $k > 0$ tal que

$$\forall\ \mathbf{x} \in]\mathbf{a}, \mathbf{b}[, \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{k}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

El número k se dice *un período de* f.

Si f es periódica y k es un período, tenemos que kn, donde $n \in \mathbb{N}$, es un período, ya que

$$f(x + 2k) = f\big((x + k) + k\big) = f(x + k) = f(x)$$
$$f(x + 3k) = f\big((x + 2k) + k\big) = f(x + 2k) = f(x)$$

y, en general,

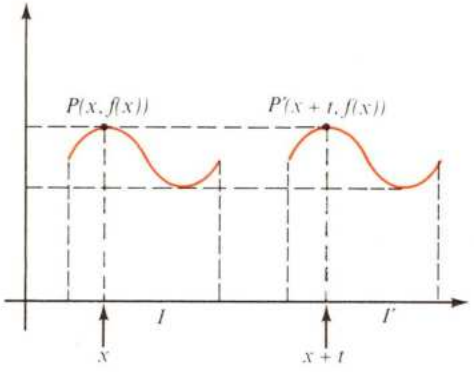
$$f(x + n\,k) = f(x)$$

Cuando se hable de una función periódica de período k, se entiende que *k es el menor de todos los períodos.*

Ejemplos:

- La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es periódica de período 2π, pues $f(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x = f(x)$.
- La función $f(x) = \operatorname{tg} x$ es periódica de período π, pues $f(x + \pi) = \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x = f(x)$.

Si f es periódica con período t, entonces si x describe un intervalo I, $x + t$ describe un intervalo I', y si $(x, f(x))$ pertenece a la gráfica de f, $(x + t, f(x))$ pertenece a la gráfica de f, y por tanto la gráfica de f en I' es la misma que la de f en I (Fig. 5).



(Fig. 5)

6 Asíntotas

6.1. *Asíntotas verticales*

Sea $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función $x_0 \in]a, b[$; la recta $x = x_0$ se dice una *asíntota vertical* si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Ejemplos:

- Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$; entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$, luego la recta $x = 0$ es una asíntota vertical de f.

14. Halla las asíntotas verticales de las curvas:

a) $y = \dfrac{-1}{x}$ b) $y = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

c) $y = \dfrac{3x^2 + 5}{(x - 1)(x^2 + 4)}$ d) $y = x^2$

e) $y = x^3 - 1$ f) $y = \operatorname{sen} x$

- Sea $f(x) = -\dfrac{x^2+3}{(1-x)(x+2)}$; entonces $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$ y por tanto la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de f.

De la definición de límite se sigue que si $x = x_0$ es una asíntota vertical de f para valores de x próximos a x_0, los valores de f se hacen tan grandes o tan pequeños como queramos (Fig. 6).

Se pueden presentar los siguientes casos:

a) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$

b) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$

d) $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

El comportamiento de la curva en las proximidades de $x = x_0$ viene expresado en la figura 7.

6.2. *Asíntotas horizontales*

Sea $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función; se dice que la recta $y = m$ es una *asíntota horizontal de* f si $\lim_{x\to\infty} f(x) = m$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = m$.

Ejemplos:

- Sea la función $f(x) = \dfrac{3x^2+8}{x^2-1}$; entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$, luego la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal de f.
- Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$; entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de f.

6.3. *Asíntotas oblicuas*

Sea $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función; la recta $y = mx + p$ $(m \neq 0)$ es una *asíntota oblicua de* f si $\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx - p) = 0$.

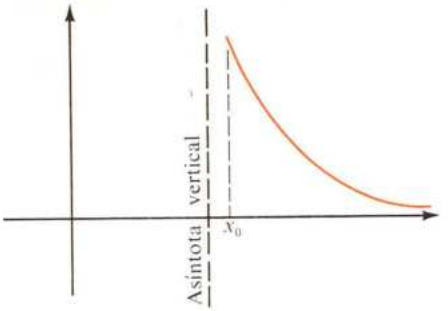
Vamos a calcular las asíntotas oblicuas de una función:

Si $y = mx + p$ es una asíntota oblicua de f, entonces

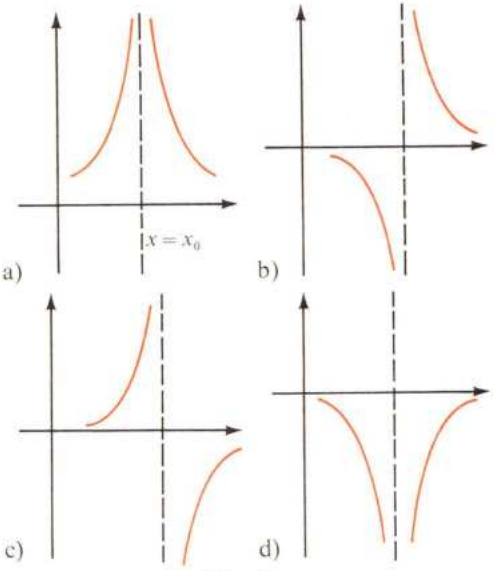
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x) - mx - p}{x} + m + \frac{p}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x) - mx - p}{x} \right) + \lim_{x\to\infty} \left(m + \frac{p}{x} \right) = m,$$

luego $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $p = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$



(Fig. 6)



(Fig. 7)

15. Halla las asíntotas horizontales de las curvas siguientes:

a) $y = x - 5$ b) $y = x^3 + 4$

c) $y = \dfrac{3x^2+5x+4}{x^2+1}$ d) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

16. Halla para las siguientes funciones sus asíntotas horizontales:

a) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ b) $y = \dfrac{2x^3+3x}{x^3-1}$

Ejemplos:

- Sea $y = \dfrac{3x^2 + 5}{x + 4}$; entonces $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + 5}{x^2 + 4x} = 3$

  y $p = \lim\limits_{x\to\infty} (y - m\,x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + 5}{x + 4} - 3x =$

  $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-12x + 5}{x + 4} = -12$, luego la recta $y = 3x - 12$ es una asíntota oblicua de $y = \dfrac{3x^2 + 5}{x + 4}$

- Sea $y = x^2 + 7$; entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} (x + 7) = \infty$,

  luego $y = x^2 + 7$ *no* tiene asíntotas oblicuas.

17. Halla, si existen, los puntos de corte de la curva $y = \dfrac{x^2 + 4x}{x^2 - 1}$ con su asintota.

18. Halla, si existen, las asíntotas horizontales de las curvas siguientes:

a) $y = x + 8$ b) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 3}$

c) $y = \dfrac{x^5 + 4}{x^6 + 7}$ d) $y = x^3 + 2$

19. Halla los puntos de corte de las curvas del ejercicio anterior con sus asíntotas oblicuas.

7 Regiones

Para obtener más información sobre la gráfica de una función f, es conveniente estudiar el signo de f en distintas regiones del plano.

Las regiones a estudiar suelen tomarse comprendidas entre los puntos de corte al eje OX y las asíntotas verticales.

En cada uno de estos intervalos se estudia el signo de f: si f toma valores positivos, entonces *no* existe gráfica por debajo del eje OX; si f toma valores negativos, entonces *no* existe gráfica por encima del eje OX.

Ejemplos:

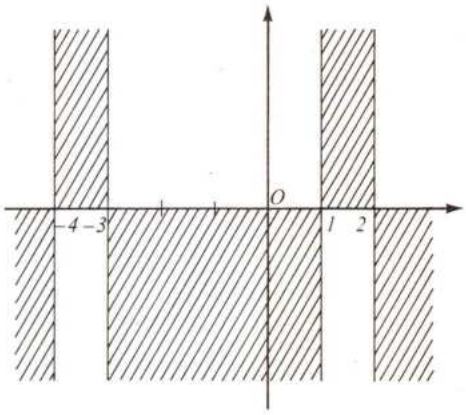
- Sea $y = \dfrac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 1)(x + 4)}$; entonces los cortes a OX son $x = 2$ y $x = -3$ (valores para los que $y = 0$).

  Las asíntotas verticales son $x = 1$. $x = -4$.

  Tenemos entonces los siguientes intervalos:

Intervalos	$x<-4$	$-4<x<-3$	$-3<x<1$	$1<x<2$	$2<x$
Signo del numerador	+	+	−	−	+
Signo del denominador	+	−	−	+	+
Signo de y	+	−	+	−	+

  Luego las regiones donde existe la curva son las no rayadas en la figura 8.



(Fig. 8)

8 Representación gráfica de una función

8.1. En este apartado vamos a ver como a partir de la información obtenida a lo largo del tema sobre una función $y = f(x)$ podemos encontrar una representación de la gráfica de la función. Resumamos los pasos a seguir:

1.º) Intervalos de definición (puntos en los que f está definida).

2.º) Cortes a los ejes
- Corte a OX: se hace $y = 0$ y se calculan los correspondientes valores de x.
- Corte a OY: se hace $x = 0$ y se calculan los correspondientes valores de y.

3.º) Cálculo de $y' = f'(x)$
- (3.1) Valores de x tales que $f'(x) = 0$.
- (3.2) Valores de x tales que $f'(x) > 0$ (Intervalos de crecimiento).
- (3.3) Valores de x tales que $f'(x) < 0$ (Intervalos de decrecimiento).

4.º) Cálculo de $y'' = f''(x)$
- (4.1) Valores de x tales que $f''(x) > 0$ (La curva es cóncava hacia arriba).
- (4.2) Valores de x tales que $f''(x) < 0$ (La curva es cóncava hacia abajo).
- (4.3) Valor de $f''(x)$ en los puntos hallados en (3.1)
  $f''(x) > 0$ mínimo
  $f''(x) < 0$ máximo.

5.º) Cálculo del valor de la ordenada en los máximos y mínimos.

6.º) Cálculo de los x tales que $f''(x) = 0$.

7.º) Cálculo de $f'''(x)$
- (7.1) Valores calculados en (6.º) tales que $f'''(x) \neq 0$ (P. inflexión).
- (7.2) Valores calculados en (6.º) tales que $f'''(x) = 0$ (Estudio del comportamiento de f'' en las proximidades de dichos valores).

8.º) Simetrías de f { Respecto del eje OY. / Respecto al origen.

9.º) Periodicidad de f.

10.º) Asíntotas {
Verticales: Las rectas $x = a$ tales que $\lim_{x \to a} f(x) = \pm \infty$

Horizontales: $y = \lim_{x \to \infty} f(x)$,

$y = \lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Oblicuas: $y = mx + p$,

donde $m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} \neq \pm \infty$,

y $p = \lim_{x \to \infty} (y - mx)$

11.º) Regiones: estudio del signo de f en los intervalos del eje de abscisas determinados por los cortes a OX y las asíntotas verticales.

A veces también es útil el cálculo de algunos puntos que nos ayuden al trazado de $y = f(x)$.

Veamos algunos ejemplos de este esquema.

8.2. *Representación gráfica de la función* $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

La función está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

Cortes al eje OY:

Hacemos $x = 0$, y se tiene $y = 0$, luego la curva corta al eje OY en $(0, 0)$.

Cortes al eje OX:

Si $y = 0$, se tiene que $x^3 - 2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 0$ o $x^2 - 2x + 1 = 0$, por tanto las soluciones son $x = 0$, $x = 1$ (doble).

$y' = f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1, x = 1/3$, luego $y = (x - 1)(x - 1/3)$

Intervalos	$x < 1/3$	$1/3 < x < 1$	$1 < x$
Signo de y'	+	−	+
y es	creciente	decreciente	creciente

Los posibles extremos corresponden a $x = 1$ y $x = 1/3$.

$$f''(x) = 6x - 4$$

Como $f''(1) = 2 > 0$, $x = 1$ corresponde a un mínimo.

Como $f''(1/3) = -2 < 0$, $x = 1/3$ corresponde a un máximo.

Se tiene: mínimo, $m = (1, 0)$

máximo, $M = (1/3, 4/27)$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2/3$$

Intervalos	$-\infty < x < 2/3$	$2/3 < x < \infty$
Signo de f''	$-$	$+$
f es	cóncava hacia abajo	cóncava hacia arriba

Como $f'''(x) = 6 \neq 0$, $x = 2/3$ es un punto de inflexión que corresponde a $I = (2/3, 2/27)$.

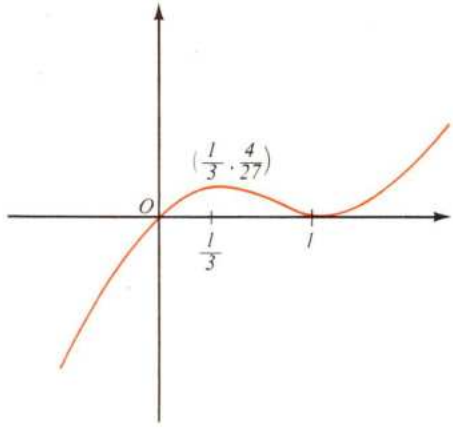
Evidentemente, f no es simétrica respecto al eje OY ni al origen, ni es periódica; f no tiene asíntotas horizontales, ni verticales, ni oblicuas.

Regiones:

$$y = x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + 1$$

Intervalos	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Signo de f	$-$	$+$	$+$

La curva resulta entonces la de la figura 9.



(Fig. 9)

8.3. Representación gráfica de la función

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 22$$

La función está definida para todo valor de x.

Cortes a OX:

$y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = 0$; las raíces de esta ecuación son $x = 2$, $x = \dfrac{1 + \sqrt{45}}{2}$ y $x = \dfrac{1 - \sqrt{45}}{2}$, luego la curva corta a OX en $(2, 0)$, $\left(\dfrac{1 + \sqrt{45}}{2}, 0\right)$ y $\left(\dfrac{1 - \sqrt{45}}{2}, 0\right)$.

Cortes a OY:

$x = 0$ es $y = 22$, luego la curva corta a OY en $(0, 22)$.

Encontremos los valores para los cuales se anula y':

$$y' = 3x^2 - 6x - 9, \quad y' = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \text{y} \quad x = 3$$

El signo de y' nos da los intervalos donde la curva es creciente o decreciente.

Intervalos	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
Signo de y'	+	−	+
y es	creciente	decreciente	creciente

Determinemos si para $x = -1$ y $x = 3$ la curva alcanza un máximo o un mínimo:

$y'' = 6x - 6, y''(-1) = -12 < 0 \Rightarrow$ máximo $M(-1, 27)$

$y''(3) = 12 > 0 \Rightarrow$ mínimo $m(3, -5)$

Si hay un punto de inflexión, en él se anula y''; $y'' = 0 \Rightarrow x = 1$, además $y''' = 6 \neq 0$, luego $P(1, 11)$ es un punto de inflexión.

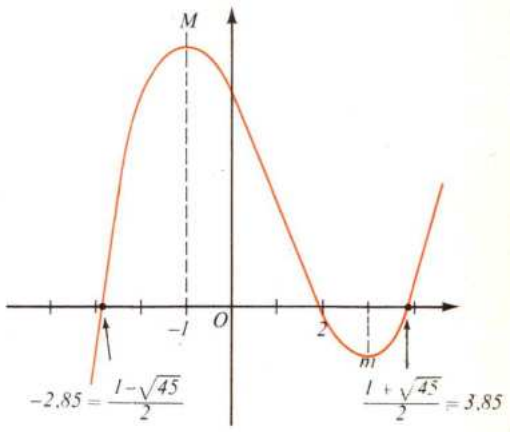
La curva no tiene asíntotas ni simetrías.

Regiones:

20. Representa la función $y = x^3 - 3x + 2$.

Intervalos	$-\infty < x < \frac{1-\sqrt{45}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{45}}{2} < x < 2$	$2 < x < \frac{1+\sqrt{45}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{45}}{2} < x < \infty$
Signo de y	−	+	−	+

Con esta información se puede representar la curva de la figura 10.



(Fig. 10)

8.4. *Representación gráfica de la función* $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$

La función está definida en todos los puntos excepto los que anulan el denominador, es decir, $x = -1/2$.

Cortes a OX:

$y = 0 \Rightarrow x = 1$, luego $(1, 0)$ es el punto de corte a OX.

Cortes a OY:

$x = 0 \Rightarrow y = -1$, luego $(0, -1)$ es el punto de corte a OY.

$$y' = \frac{3}{(2x+1)^2}$$

Como y' es siempre positiva, se tiene que y es siempre creciente y no tiene máximos ni mínimos.

$$y'' = \frac{-12}{(2x+1)^3}$$

Intervalo	$-\infty < x < -1/2$	$-1/2 < x < \infty$
y''	+	−
y es	cóncava hacia arriba	cóncava hacia abajo

y no posee puntos de inflexión pues siempre $y'' \neq 0$.

y tampoco tiene simétricas ni es periódica.

$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} y = \infty$, luego $x = -1/2$ es una asíntota vertical.

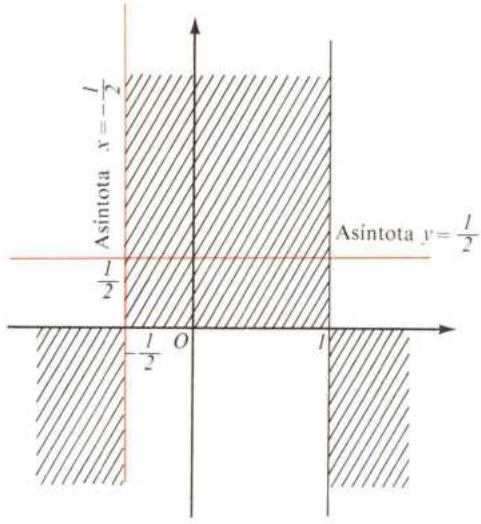
$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{2x+1} = \frac{1}{2}$, luego $y = \frac{1}{2}$ es una asíntota horizontal.

y no tiene asíntota oblicua, pues $m = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{(2x+1)x} = 0$

Regiones:

Intervalos	$-\infty < x < -1/2$	$-1/2 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Signo numerador	−	−	+
Signo denominador	−	+	+
Signo y	+	−	+

En la figura 11 se tiene el recinto en donde se encuentra la curva.

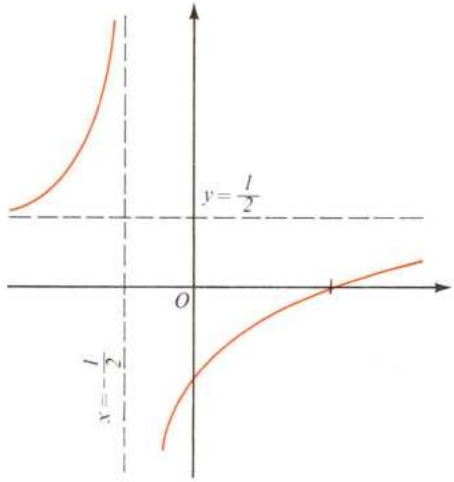


(Fig. 11)

Para precisar más veremos cómo se comporta la curva respecto a las asíntotas.

Los puntos de intersección de la curva con la asíntota horizontal $y = \frac{1}{2}$ se obtendrán resolviendo la ecuación $\frac{x-1}{2x+1} = \frac{1}{2}$

$\frac{x-1}{2x+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 2 = 2x + 1 \Rightarrow -2 = 1$ (igualdad absurda); por tanto, la curva no corta a la asíntota, luego la gráfica de f será la indicada en la figura 12.



(Fig. 12)

8.5. *Representación gráfica de la función* $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$

La función está definida para todo valor de $x \neq 1$.

Cortes a OX:

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = -2$, luego la curva corta a OX en $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

Cortes a OY:

$x = 0 \Rightarrow y = 4$, luego el punto de corte a OY es $(0, 4)$.

$y' = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{(x - 1)^2}$; como el denominador es siempre positivo, nos interesa solamente estudiar el numerador. El trinomio $x^2 - 2x + 4$ se puede escribir como $(x - 1)^2 + 3$, luego siempre es positivo; por tanto nunca se puede hacer cero, es decir, la curva no tiene máximos ni mínimos y es siempre creciente, ya que y' es siempre positivo.

Asíntotas verticales: $x = 1$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 4}{x - 1} = \infty$, luego no existen asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: $y = mx + p$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4}{(x - 1)x} = 1$$

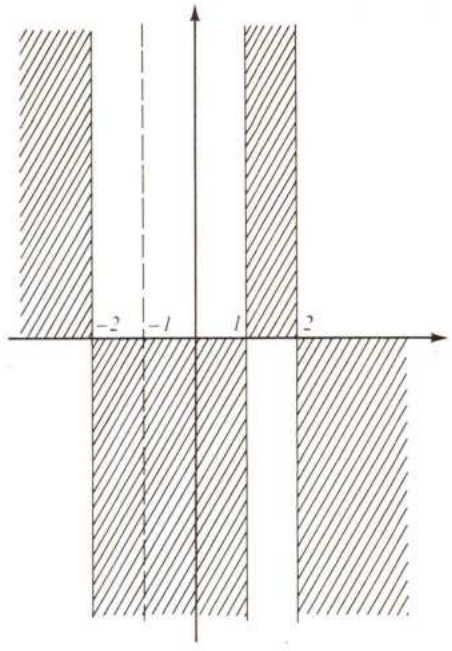
$$p = \lim_{x \to \infty} (y - mx) = \lim_{x \to \infty} (y - x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x - 4}{x - 1} = 1,$$

luego la asíntota oblicua es $y = x + 1$.

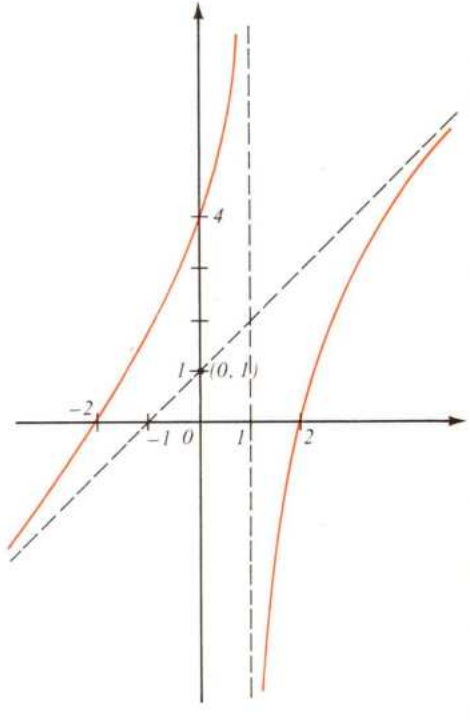
Regiones (Fig. 13-a):

Intervalos	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Signo numerador	+	−	−	+
Signo denominador	−	−	+	+
Signo y	−	+	−	+

El estudio realizado nos permite representar la función de la figura 13-b.



(Fig. 13-a)



(Fig. 13-b)

Ejercicios y cuestiones

21. Sea la función f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

1.º) Calcula:

a) $f'(x)$ para $x < 0$

b) $f'(x)$ para $x > 0$

2.º) Completa una tabla como la siguiente colocando adecuadamente las palabras *creciente* y *decreciente*:

x	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
$f'(x)$		
$f(x)$		

3.º) Representa la función.

22. Calcula el dominio de definición de las funciones

a) $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$

b) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

23. Representa gráficamente las curvas de ecuación:

a) $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ b) $y = x^5$ c) $y = 5x^3 + 2x$ d) $y = (x-2)^2$

e) $y = (x-1)^{1/2}$ f) $y = (x+1)^3$ g) $y = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+4)x}$ h) $y = \sqrt{9-x^2}$

i) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ j) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

Tema 17

APLICACION DE LAS DERIVADAS A LA DETERMINACION DE TANGENTES

En el tema 13 hemos visto que la derivada de una función $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ *en un punto* $x_0 \in]a, b[$ *puede interpretarse como la pendiente de la recta tangente en el punto* $P_0 = (x_0, f(x_0))$ *a la curva representativa de la gráfica de f.*

En este tema vamos a volver sobre esta idea utilizándola para determinar la ecuación de la tangente a un cierto tipo de curvas, las cónicas, que has estudiado en los temas 9 y 10.

1 Ecuación de la tangente a una curva

Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva del plano, referida a unos ejes coordenados rectangulares, y sea $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto de dicha curva. Hemos visto que la pendiente de la tangente a la curva en P_0 es la derivada de $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$.

Recordando la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene de pendiente m, la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ será:

$$\mathbf{y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)}$$

Como $P_0 = (x_0, y_0)$ es un punto de la curva, será $y_0 = f(x_0)$, luego la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = x_0$ será:

$$\mathbf{y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)}$$

Ejemplos:

- Sea la curva de ecuación $y = 3x^2 - 6x$ y $P = (1, -3)$; entonces P es un punto de la curva, pues sus coordenadas verifican la ecuación. La pendiente de la tangente en P será el valor de la derivada de la función y en $x_0 = 1$; como $y' = 6x - 6$, la pendiente valdrá $y' = 0$ y la ecuación de la tangente será:

  $y - (-3) = 0\,(x - 1)$, es decir, $y + 3 = 0$.

- Consideremos la curva de ecuación $y = e^{5x+1}$. La tangente en $x_0 = 2$ tendrá por pendiente $m = f'(x_0) = f'(2)$; como $f'(x) = 5\,e^{5x+1}$, será $m = 5\,e^{11}$, y la ecuación de la tangente en $x_0 = 2$ será:

  $y - e^{(5\cdot 2)+1} = 5\,e^{11}(x - 2)$, es decir, $y - e^{11} = 5\,e^{11}x - 10\,e^{11}$.

  Simplificando, resulta: $y = 5\,e^{11}x - 9\,e^{11}$.

Ejercicios:

1. Halla la ecuación de la tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $y = x^2 + 6x - 1$ en $(0, -1)$

b) $y = 3x^3 + 4$ en $(1, 7)$

c) $y = \operatorname{sen}(3x + \pi)$ en $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$

d) $y = \lg_5 (x^2 + 1)$ en $(2, 1)$

2. Halla, mediante derivación implícita, la ecuación de la tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $y^2 + \sqrt{y} - 7x^2 = 6$ en $(\sqrt{2}, 4)$

b) $x^5 + xy^4 - 3x^2y = 1$ en $(1, 0)$

3. Halla la ecuación de la tangente a las siguientes curvas en los puntos de abscisa $x = 0$:

a) $y = x^5 + (3x^2 - 1)^4 + 2$

b) $y = \dfrac{1}{x^3 - 1}$

c) $y = \operatorname{sen}(2x + 1)^5$

2 Ecuación de la tangente a una circunferencia en uno de sus puntos

2.1. Si la ecuación de la circunferencia viene dada en la forma reducida $x^2 + y^2 = r^2$, la ecuación de la tangente en $P_0 = (x_0, y_0)$ $(y_0 \neq 0)$ es:

$$\mathbf{y_0\, y + x_0\, x = r^2}$$

En efecto: si P_0 es un punto de la circunferencia, sus coordenadas deben verificar la ecuación, es decir: $x_0^2 + y_0^2 = r^2$

Derivando implícitamente en la ecuación de la circunferencia (ver tema 9), se tiene:

$$2x + 2y\, y' = 0, \text{ de donde } y' = -\frac{x}{y}$$

El valor de y' en $P_0 = (x_0, y_0)$ será entonces $-\frac{x_0}{y_0}$ y la ecuación de la tangente en P_0 será:

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0),$$

de donde:

$$y_0 y - y_0^2 = -x_0 x + x_0^2, \text{ luego}$$

$$y_0 y + x_0 x = y_0^2 + x_0^2 = r^2, \text{ es decir:}$$

$$y_0 y + x_0 x = r^2$$

(Si $y_0 = 0$, entonces la tangente no tiene definida la pendiente; por tanto, es paralela al eje OY y su ecuación será $x = x_0$.)

Ejemplo:

- Sea la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$; entonces la tangente en $(2, \sqrt{5})$ será:

$$\sqrt{5}\, y + 2x = 9$$

2.2. Si la ecuación de la circunferencia viene dada en la forma general: $x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, entonces, por derivación implícita, se tiene:

$$2x + 2y\, y' + 2D + 2Ey' = 0,$$

de donde $y' = -\frac{x + D}{y + E}$

La tangente en $P_0 = (x_0, y_0)$ será: $y - y_0 = -\frac{x_0 + D}{y_0 + E}(x - x_0)$

4. Halla la ecuación de la tangente a la circunferencia $4x^2 + 4y^2 = 24$ en el punto $(1, \sqrt{5})$.

5. Halla la ecuación de la tangente a la circunferencia $9x^2 + 9y^2 = 18$ en el punto de abscisa $x_0 = -1$.

6. Halla la ecuación de la tangente a las circunferencias:

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$ en $(1, 2)$

b) $6x^2 + 6y^2 + x + 6y - 19 = 0$ en $(1, 1)$

7. Halla la ecuación de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - y - 13 = 0$ en los puntos de abscisa $x_0 = 1$.

Ejemplo:

- Sea la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 27 = 0$. Vamos a hallar la tangente en el punto de abscisa $x_0 = -2$.

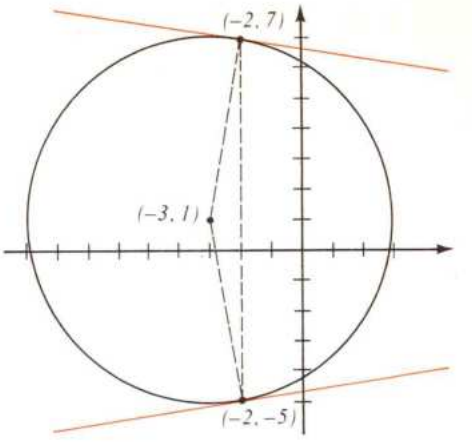
  Sea el punto $P = (-2, y_0)$; entonces $(-2)^2 + y_0^2 + 6(-2) - 2y_0 - 27 = 0$, de donde $y_0^2 - 2y_0 - 35 = 0$. Resolviendo esta ecuación, se tiene: $y_0 = -5$ e $y_0 = 7$, es decir, que hay dos puntos en la circunferencia con abscisa -2 (Fig. 1), que son $P_1 = (-2, -5)$ y $P_2 = (-2, 7)$.

  En el ejemplo, $A = 3$ y $B = -1$; luego la tangente en P_1 será:

  $$y + 5 = -\frac{-2+3}{-2-1}(x+2), \text{ es decir, } y + 5 = \frac{1}{6}(x+2)$$

  Y la tangente en P_2 será:

  $$y - 7 = -\frac{-2+3}{7-1}(x+2), \text{ es decir, } y - 7 = -\frac{1}{6}(x+2)$$



(Fig. 1)

3 Ecuación de las tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a ella

Consideremos la circunferencia C, cuya ecuación es $x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ y un punto $P_0 = (x_0, y_0)$, exterior a ella.

La ecuación del haz de rectas con vértice en el punto P_0 será: $y - y_0 = \lambda\ (x - x_0)$. De las rectas del haz, unas serán exteriores, otras secantes y otras tangentes a C (Fig. 2).

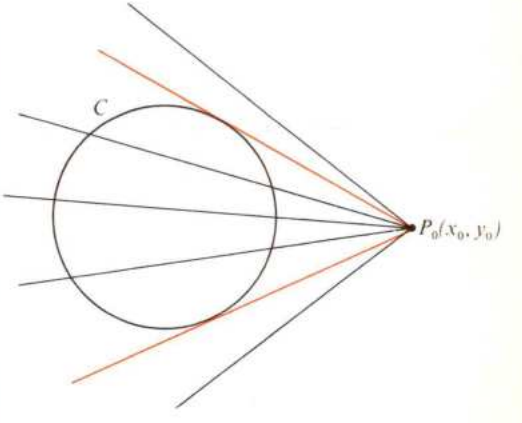
Los puntos comunes a una recta del haz $y - y_0 = \lambda\ (x - x_0)$ y a la circunferencia C serán los que verifiquen ambas ecuaciones, es decir, las soluciones del sistema:

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$
$$y = y_0 + \lambda\ (x - x_0)$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera, obtenemos una ecuación de segundo grado en x.

$$x^2 + (y_0 + \lambda(x - x_0))^2 + 2Dx + 2E\,(y_0 + \lambda(x - x_0)) + F = 0\ [1]$$

Si el discriminante de esta ecuación es negativo, la ecuación no tendrá solución real y por tanto la recta del haz *no* corta a la circunferencia. Si el discriminante es positivo, habrá dos soluciones y por lo tanto la recta del haz cortará a la circunferencia en dos puntos, es decir, será secante. Por último, si el discriminante es cero, habrá una única solución, por lo que la recta del haz cortará a la circunferencia en un solo punto y la recta será tangente.



(Fig. 2)

Esto nos da el camino a seguir para hallar las tangentes a C desde $P_0 = (x_0, y_0)$:

1.º) Hallaremos la ecuación del haz de rectas de vértice P_0.

2.º) Hallaremos λ con la condición de que el discriminante de la ecuación [1] sea cero; estos valores de λ nos darán las pendientes de las rectas del haz tangentes a C.

Ejemplo:

- Sea la circunferencia C de ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 5 = 0$ y el punto exterior $P = (2, 0)$; entonces las tangentes a C desde P las determinaremos así:

1.º) Haz de rectas de vértice P:

$$y - 0 = \lambda (x - 2), \text{ es decir, } y = \lambda (x - 2)$$

2.º) Obtenemos la ecuación [1]

$$x^2 + [\lambda (x-2)]^2 + 2x + 2 [\lambda (x-2)] - 5 = 0,$$

de donde:

$$(1 + \lambda^2)x^2 + (-4\lambda^2 + 2\lambda + 2)x + 4\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

3.º) El discriminante de esta ecuación de 2.º grado es:

$$(-4\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 - 4(1 + \lambda^2)(4\lambda^2 - 4\lambda - 5) = \\ = -8\lambda^2 + 24\lambda + 24$$

4.º) Igualamos el discriminante a cero y hallamos λ:

$$-8\lambda^2 + 24\lambda + 24 = 0, \text{ de donde:}$$

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \text{ y } \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$$

Luego existen dos tangentes a C desde P, y sus ecuaciónes son:

$$y = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}(x - 2); y = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}(x - 2)$$

8. Halla las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ desde el punto (4, 2).

9. Halla las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 1$ desde el punto (0, 0).

4 Ecuación de la tangente a la elipse y a la hipérbola

4.1. La ecuación de la tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ con $(y_0 \neq 0)$, es

$$\mathbf{\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1}$$

En efecto: por ser $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto de la elipse,

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

Derivando implícitamente en la ecuación de la elipse, se tiene:

$$2\frac{x}{a^2} + 2\frac{yy'}{b^2} = 0$$

De donde $y' = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$; la pendiente de la tangente en P_0 será entonces:

$$m = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$$

Y por tanto la ecuación de la tangente es:

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$$

Operando, se tiene:

$$a^2 y_0 y - a^2 y_0^2 + b^2 x_0 x - b^2 x_0^2 = 0$$

Dividiendo por $a^2 b^2$:

$$\frac{y_0 y}{b_2^2} + \frac{x_0 x}{a^2} - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) = 0$$

Como $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$, resulta: $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$

(Si $y_0 = 0$, la pendiente de la tangente no está definida; por tanto, será tangente a OY y su ecuación $x = x_0$.)

Ejemplo:

- La tangente a la elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ en el punto $(1, \sqrt{8/3})$ es

$$\frac{x}{9} + \sqrt{\frac{8}{3}}\cdot\frac{y}{3} = 1$$

4.2. La ecuación de la tangente a la hipérbola de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$, con $y_0 \neq 0$, es

$$\frac{\mathbf{x_0\, x}}{\mathbf{a^2}} - \frac{\mathbf{y_0\, y}}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}$$

La demostración es totalmente análoga al caso de la elipse, y se deja como ejercicio.

10. Halla la ecuación de la tangente a la elipse $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ en el punto $P = (1, \sqrt{8/3})$.

11. Halla la ecuación de la tangente a la elipse $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{15} = 1$ en los puntos de abscisa $x_0 = 1$.

12. Halla la ecuación de la tangente a la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ en el punto $(2, \sqrt{3})$.

13. Halla la ecuación de la tangente a la hipérbola $xy = 1$ en el punto de abscisa $x_0 = 3$.

Ejemplo:

- Vamos a hallar la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ en el punto de abscisa $x_0 = 8$.

  Hallaremos primero las coordenadas del punto. Se tiene:

  $$\frac{x_0^2}{16} - \frac{y_0^2}{25} = 1, \text{ de donde } \frac{64}{16} - \frac{y_0^2}{25} = 1,$$

  y por tanto $y_0^2 = 3$, luego $y_0 = \sqrt{3}$ e $y_0 = -\sqrt{3}$, es decir, existen dos puntos sobre la hipérbola de abscisa 8, que son

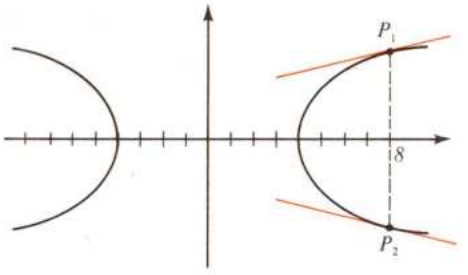
  $$P_1 = (8, \sqrt{3}) \quad \text{y} \quad P_2 = (8, \sqrt{3}) \text{ (Fig. 3)}$$

  La tangente en P_1 será:

  $$\frac{8x}{16} - \frac{\sqrt{3}\,y}{25} = 1$$

  La tangente en P_2 será:

  $$\frac{8x}{16} + \frac{\sqrt{3}}{25}\,y = 1$$



(Fig. 3)

14. Halla las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{36} = 1$ en los puntos de abscisa $x_0 = 2$.

15. Obtén, guiándote del procedimiento seguido para la elipse, la ecuación de la tangente a una hipérbola en uno de sus puntos $P_0 = (x_0, y_0)$.

5 Ecuación de la tangente a la parábola

La ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 2px$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$, con $y_0 \neq 0$, es $\mathbf{y_0\,y = p(x - x_0)}$

En efecto: si P_0 es un punto de la parábola, debe ser $y_0^2 = 2px_0$. Derivando implícitamente en la ecuación de la parábola, se tiene $2yy' = 2p$, luego $y' = \frac{p}{y}$, y por tanto la pendiente de la tangente en P_0 es $m = \frac{y_0}{y_0}$ y la ecuación de la tangente será

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x + x_0)$$

De donde:

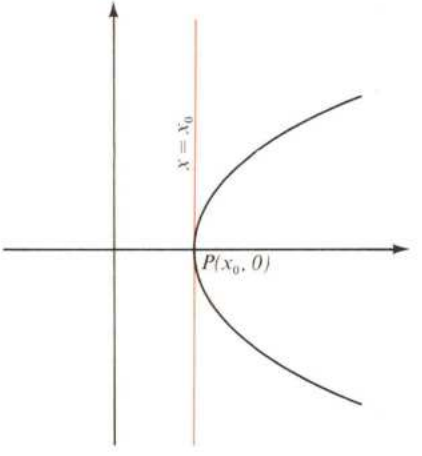
$$y_0 y - y_0^2 = px - px_0$$

$$y_0 y = px + y_0^2 - px_0 = px + 2px_0 - px_0$$

Luego:

$$y_0 y = p(x + x_0)$$

Nota: Si el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ tiene ordenada $y_0 = 0$, entonces el punto P_0 es el vértice de la parábola y su tangente (Fig. 4) es la recta $x = x_0$.



(Fig. 4)

16. Halla la ecuación de la tangente a las parábolas siguientes en los puntos que se indican:

a) $y^2 = 6x$ en (24, 12)

b) $y^2 = 9x$ en (0, 0)

Ejercicios y cuestiones

17. Halla la ecuación de la tangente a las curvas de ecuación

a) $y = (x^2 - 6x - 1)^3$, b) $y = L(x^2 + 5x - 3)$, c) $y = e^{3x^2 + 4}$, en el punto de abscisa $x_0 = 3$

18. ¿Cuál es la ecuación de la tangente a $y = \text{sen}^3 \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ en el punto $(0, 1)$?

19. ¿En qué puntos es la tangente a la curva $y = \text{sen}\ (x^2 + 1)$ paralela al eje OX?

20. ¿En qué punto de la curva $y = x^2 + 6x$ la tangente forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje OX?

21. Puede ser en algún punto la tangente a la curva $y = e^{2x}$ paralela al eje OX?

22. Halla la ecuación de la tangente a la circunferencia $3x^2 + 3y^2 - 6x + 2y = 0$ en el punto $(1, 1)$.

23. Halla la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ en los puntos de abscisa $x_0 = 2$.

24. ¿En qué puntos la tangente a la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ forma un ángulo de 30° con la parte positiva del eje OX?

25. Halla la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ en los puntos de abscisa $x_0 = 4$.

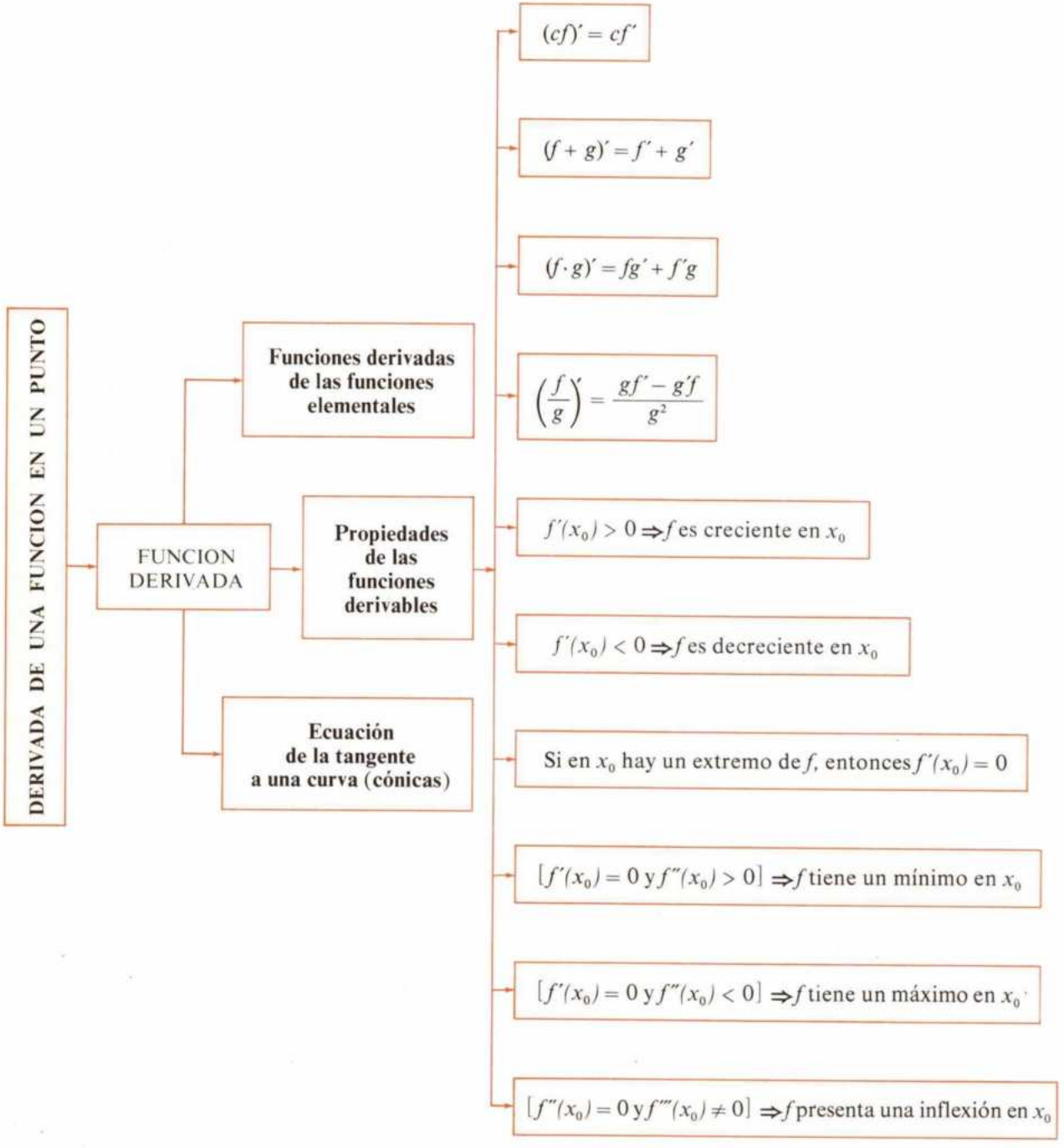
26. Halla la ecuación de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ trazadas desde $(6, 0)$.

27. Halla la ecuación de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$ trazados desde $(3, -9)$.

28. ¿Cuál es la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 8x$ en $(1, -\sqrt{8})$?

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD 5

CALCULO DIFERENCIAL



Unidad 6

CALCULO INTEGRAL

Así como el estudio del problema de la tangente a una curva dio origen al cálculo diferencial, el estudio del área limitada por una curva dio origen al cálculo integral.

En el nivel que nos encontramos no es posible establecer de un modo riguroso el concepto de integral de una función continua; nosotros llegaremos a él a través del concepto de integral de una función escalonada, que es muy sencillo.

Antes de iniciar el estudio de la integral definida para funciones escalonadas (tema 20) nos ha parecido oportuno dedicar el segundo tema de esta Unidad al estudio de este tipo de funciones.

El primer tema se dedica al estudio de la integral indefinida y a los métodos de integración. Después de estudiar la Regla de Barrow, se dedica el último tema de la Unidad al cálculo de áreas y de volúmenes.

Tema 18

1. Primitivas de una función.
2. Primitivas de una suma de funciones.
3. Primitivas de una función por un número real.
4. Primitivas de las funciones más usuales.
5. Integración por cambio de variable.
6. Integración por partes.
7. Integración de funciones racionales sencillas.

Tema 19

1. Particiones de un intervalo $[a, b]$.
2. Funciones escalonadas.
3. Operaciones con funciones escalonadas.
4. El espacio vectorial $\mathscr{E}([a, b])$.
5. Valor absoluto de una función escalonada.

Tema 20

1. Integral de una función escalonada.
2. Propiedades de la integral de funciones escalonadas.
3. Aproximación de una función continua mediante funciones escalonadas.
4. Integral de una función en un intervalo cerrado.
5. Propiedades de la integral de una función continua.

Tema 21

1. Función integral asociada a una función escalonada.
2. Función integral asociada a una función continua.
3. Regla de Barrow.

Tema 22

1. Areas de recintos planos.
2. Volúmenes de sólidos de revolución determinados por funciones escalonadas.
3. Volúmenes de sólidos de revolución determinados por funciones continuas.
4. Una aplicación física de la integral: trabajo de una fuerza.

Tema 18 FUNCIONES PRIMITIVAS: INTEGRAL INDEFINIDA

Comienza este tema estudiando el concepto de primitivas de una función y el de integral indefinida.

Las propiedades de la integral indefinida se dan como consecuencia de las obtenidas para las primitivas.

Finalmente, se estudian algunos métodos elementales de integración de funciones: integración por cambio de variable, integración por partes e integración de funciones racionales cuyo polinomio denominador tiene todas sus raíces reales sencillas.

1 Primitivas de una función

El problema que trataremos de resolver en este tema es el siguiente: dada una función $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, ¿es posible encontrar otra función $F:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que su derivada coincida con f? En caso afirmativo, ¿la solución es única?

Esta idea inicial nos conduce a la siguiente definición:

1.1. *Sea $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que la función $F:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, derivable en $]a, b[$, es una primitiva de f si $DF = f$.*

Ejemplos:

- Consideremos la función $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^2$. Entonces $F:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^3$, es una primitiva de f, ya que $F'(x) = f(x) = 3x^2$.
- Cualquier función constante es una primitiva de la función $\mathbf{0}:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathbf{0}(x) = 0$.
- Las funciones $F_1, F_2:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $F_1(x) = e^x + 3$, $F_2(x) = e^x - 1$ son primitivas de la función $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$

Nota: Observa en los dos últimos ejemplos que una misma función puede tener varias primitivas.

1.2. Si $f(x) = C$ es una función constante, sabemos que su derivada es cero, $f'(x) = 0$.

Como consecuencia podemos afirmar que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y C es una constante cualquiera, la función $F(x) + C$ es también una primitiva de f, ya que

$$[F(x) + C]' = F'(x) + 0 = f(x) + 0 = f(x)$$

Ejercicios:

1. ¿Es la función $F:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = x^3 + 2x + 3$ una primitiva de $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 + 2$?

Razona la respuesta.

2. ¿Cuáles de las siguientes funciones son primitivas de la función $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$?

a) $F_1(x) = \operatorname{tg} x$

b) $F_2(x) = \cos x + 2$

c) $F_3(x) = \cos x + 1$

d) $F_4(x) = -2 \cos x$

e) $F_5(x) = -\cos x$

3. Calcula una primitiva de la función $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2$.

4. De las siguientes afirmaciones, indica las que son ciertas:

a) $\operatorname{tg} x$ es una primitiva de $\operatorname{tg}^2 x + 1$

b) $\frac{x^4}{4}$ es una primitiva de x^3

c) x^2 es una primitiva de x^3

También se verifica, aunque no lo demostraremos, que si $f'(x) = 0$, entonces $f(x)$ es constante, es decir, de la forma $f(x) = C$.

El siguiente teorema conduce à la caracterización de todas las primitivas de una función $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$

1.3. *Si $F_1, F_2:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ son primitivas de $f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, entonces la diferencia de estas funciones, $F_1 - F_2$, es una función constante, es decir, $F_1 - F_2 = C$, donde C representa un cierto número real.*

En efecto:

Si F_1 y F_2 son primitivas de $f \Rightarrow DF_1 = f$ y $DF_2 = f \Rightarrow DF_1 - DF_2 = \mathbf{0} \Rightarrow D(F_1 - F_2) = \mathbf{0}$, por lo dicho en el apartado **1.2**

$$F_1 - F_2 = C \Rightarrow F_1 = F_2 + C$$

Es decir: *si F es una primitiva de f, entonces todas las demás primitivas se obtienen sumando a F una constante.*

Como consecuencia de este teorema se ve que el conjunto de las primitivas de una función f viene dado por

$$\{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

A este conjunto lo llamaremos *integral indefinida de f* y se denotará $\int f$, $\int f dx$ o $\int f(x)dx$. También se da este nombre a un elemento genérico de este conjunto. La función f se dice el integrando de la integral indefinida.

Así, tenemos

$$\mathbf{F \in \int f \Leftrightarrow DF = f, \text{ o con otra notación:}}$$
$$\mathbf{F(x) \in \int f(x)\, dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)}$$

Ejemplos:

- Si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ viene definida por $f(x) = e^x$, entonces
$$\int e^x dx = e^x + C$$
- Si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces
$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$$
- Al ser $D(3x^2 + 6x) = 6x + 6$, la función $F(x) = 3x^2 + 6x$ es una primitiva de $f(x) = 6x + 6$, luego
$$\int (6x + 6)\, dx = 3x^2 + 6x + C$$
- Como $D(x^3 - 1) = 3x^2$, se tiene que $\int 3x^2 dx = x^3 - 1 + C$, que también se puede escribir: $\int 3x^2 dx = x^3 + C'$, llamando C' a $-1 + C$.

5. Si $F(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ es una primitiva de la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, halla otra cualquiera.

6. Indica el conjunto de las primitivas de la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$.

7. De las siguientes relaciones, indica cuáles son ciertas y cuáles son falsas:

a) $3x^2 + 5 \in \int (x^3 + 2x)\, dx$

b) $\operatorname{tg} x \in \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right) \in \int x\, dx$

d) $(x + 2) \in \int 10\, dx$

e) $(x^6 + 1) \in \int 6x^5 dx$

f) $(2e^x + 1) \in \int e^x\, dx$

8. Calcula $\int f(x)dx$ si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ viene definida por $f(x) = x^3$.

2 Primitivas de una suma de funciones

Si F_1, F_2: $]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ son primitivas de f_1, f_2: $]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ respectivamente, entonces $F_1 + F_2$ es una primitiva de $f_1 + f_2$.

En efecto:

F_1 primitiva de $f_1 \Leftrightarrow DF_1 = f_1$, F_2 primitiva de $f_2 \Leftrightarrow DF_2 = f_2$

Entonces:

$D(F_1 + F_2) = DF_1 + DF_2 = f_1 + f_2$, luego $F_1 + F_2$ es una primitiva de $f_1 + f_2$. Esto lo escribimos del modo siguiente:

$$\int [\mathbf{f_1(x) + f_2(x)}]\, \mathbf{dx} = \int \mathbf{f_1(x)dx} + \int \mathbf{f_2(x)dx}$$

Ejemplos:

- Sean f_1: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = 3x^2$, f_2: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = \cos x$

$$\int f_1(x)dx = \int 3x^2 dx = x^3 + C_1$$

$$\int f_2(x)dx = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C_2$$

Por tanto:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int (3x^2 + \cos x)dx = \int 3x^2 dx + \int \cos x\, dx =$$

$$= x^3 + C_1 + \operatorname{sen} x + C_2 = x^3 + \operatorname{sen} x + (C_1 + C_2) = x^3 + \operatorname{sen} x + C$$

- $\int (x^2 + x + 4)dx = \int (x^2 + x)dx + \int 4dx = \int x^2 dx + \int x dx + \int 4dx =$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + C$$

- Sea F_1: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $F_1(x) = x$, primitiva de una función f_1 y F_2: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $F_2(x) = \frac{1}{2} x^2$, primitiva de otra función, f_2. Entonces $F_1 + F_2$: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $(F_1 + F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x) = x + \frac{1}{2} x^2$, es una primitiva de $f_1 + f_2$.

9. Si F_1, F_2: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por $F_1(x) = 2x^2 + 3x$, $F_2(x) = x^3 + 2$ son primitivas, respectivamente, de f_1, f_2: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, calcula una primitiva de $f_1 + f_2$.

10. Calcula la integral indefinida de la función f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 - x^2 + x - 1$, sabiendo que $\int (4x^3 - 1)dx = x^4 - x + C$; $\int (x - x^2)dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 + C$

11. Si $\int f_1(x)dx = x + C_1$ y $\int f_2(x)dx = 2x^2 + x + C_2$, calcula $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx$

12. Sabiendo que la función F: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = x^2 - x + 1$ es una primitiva de $f_1 + f_2$ donde f_1 y f_2 son dos funciones reales de variable real y $F_1(x) = x$ es una primitiva de f_1, calcula la función f_2.

13. Calcula $\int f(x)dx$ sabiendo que $f = f_1 + f_2$ donde f_1, f_2: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vienen definidas por $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \cos x$.

3 Primitivas de una función por un número real

Si F es una primitiva de f y $c \in \mathbb{R}$, entonces cF es una primitiva de cf.

En efecto: Si F es una primitiva de f, $DF = f$.

Por lo tanto: $D(cF) = c(DF) = cf$

Este resultado lo expresamos del modo siguiente:

$$\int \mathbf{cf(x)dx} = \mathbf{c} \int \mathbf{f(x)dx} \text{ ó } \int \mathbf{cf} = \mathbf{c} \int \mathbf{f}$$

14. Sabiendo que $F(x) = x$ es una primitiva de la función f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$, calcula una primitiva de la función f_1: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f_1(x) = \frac{1}{2}$

15. Si $F(x) = x^2$ es una primitiva de la función, calcula una primitiva de $\frac{5}{2} f$

Ejemplos:

- Si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = 3e^x$, tenemos:

$$\int 3e^x dx = 3\int e^x dx = 3\,(e^x + C') = 3e^x + 3C' = 3e^x + C$$

- Sea $F(x) = x^2 + x$ primitiva de una función f.

Una primitiva de la función $\frac{1}{2}f$ será $\frac{1}{2}$ F, que está definida por

$$\frac{1}{2}F(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)$$

- $\int (8x^3 + 6x)dx = \int 8x^3 dx + \int 6x\,dx =$

$$= 8\int x^3 dx + 6\int x dx = 8\,\frac{x^4}{4} + \frac{6x^2}{2} + C = 2x^4 + 3x^2 + C$$

16. Calcula la integral indefinida de $f(x) = 6x^2 + 3x + 3$, sabiendo que

$$\int (2x^2 + x + 1)dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

17. Demuestra la siguiente relación:

$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx$, donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

18. Demuestra que:

$$\int |f_1(x) - f_2(x)|dx = \int f_1(x)dx - \int f_2(x)dx$$

19. Sabiendo que $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$, $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$, calcula:

$$\int (2\cos x - 3\operatorname{sen} x)\,dx$$

4 Primitivas de las funciones más usuales

4.1. Vamos a dar las primitivas de algunas funciones que por su sencillez se suelen llamar *inmediatas*, puesto que se obtienen directamente a partir de la tabla de derivadas.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ si } n \neq -1 \qquad \int \frac{dx}{x} = Lx + C,\ x > 0$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{La} + C \text{ si } a > 0,\ a \neq 1$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

Todas estas fórmulas se demuestran sólo observando que las derivadas de los segundos miembros de las igualdades coinciden con los integrandos.

20. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int (x^3 + 2x - 1)dx$

b) $\int \frac{2}{x}\,dx$

c) $\int \frac{1}{2}e^x\,dx$

d) $\int (x + 1)^2\,dx$

e) $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

Ejemplos:

- $\int \frac{dx}{x} = L\,x + C$, pues $D\,(L\,x) = \frac{1}{x}$
- La función $F(x) = \frac{a^x}{La}$ es una primitiva de $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, ya que:

$$D\left(\frac{a^x}{L\,a}\right) = \frac{1}{L\,a}\,D(a^x) = \frac{1}{L\,a}\,a^x\,L\,a = a^x$$

- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}\,x + C$, ya que $D(\text{tg}\,x + C) = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\int \frac{1}{5 + 5x^2}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{5}\,\text{arc tg}\,x + C$

4.2. La primera fórmula del apartado **4.1.** permite obtener fácilmente las integrales indefinidas de las funciones irracionales sencillas; para ello basta escribir las raíces en forma de potencia.

Ejemplos:

- $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$
- $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$
- $\int \sqrt[4]{6x^3} = \int \sqrt[4]{6}\cdot\sqrt[4]{x^3}dx = \sqrt[4]{6}\int \sqrt[4]{x^3}dx = \sqrt{6}\int x^{3/4}dx =$
$= \sqrt[4]{6}\frac{x^{7/4}}{7/4} + C = \frac{4}{7}\cdot\sqrt[4]{6}\cdot\sqrt[4]{x^7} + C = \frac{4}{7}\sqrt[4]{6x^7} + C$
- $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}} = \int x^{-2/5}dx = \frac{x^{3/5}}{3/5} + C = \frac{5}{3}\sqrt[5]{x^3} + C$

f) $\frac{1}{2 + 2x^2}\,dx$

g) $\int \frac{x^3 + 5x^2 + x - 4}{x}\,dx$

h) $\int 10^x\,dx$

i) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{7}{x^2} - 8\right)dx$

j) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\text{sen}^2 x}\right)dx$

k) $\int \frac{1}{6 + 6x^2}\,dx$

l) $\int \frac{1}{9x^2 + 9}\,dx$

21. Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \sqrt[6]{x}\,dx$; b) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

c) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$; d) $\frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}\,dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{8x}}\,dx$; f) $\int \sqrt[3]{5x^2}dx$

5 Integración por cambio de variable

5.1. Si $F(x)$ es una función cuya derivada es $f(x)$, $F'(x) = f(x)$, entonces aplicando la Regla de la cadena a la función compuesta $h(x) = F[u(x)]$ se tiene que su derivada es:

$$h'(x) = F'[u(x)]\,u'(x), \text{ luego } h'(x) = f\,[u(x)]\,u'(x)$$

De lo anterior se deduce que:

Si $\int f(x)dx = F(x) + C$, entonces también se verifica que $\int f[u(x)]\,u'(x)dx = F[u(x)] + C$

Siempre que una integral se pueda escribir en la forma $\int f[u(x)]\,u'(x)dx$, la sustitución $t = u(x)$, $dt = u'(x)dx$ la transforma en $\int f(t)dt$, que puede ser sencilla de calcular. Este modo de proceder se llama método de integración *por sustitución* o *cambio de variable*.

Ejemplo:

- Calculemos $\int \frac{x^3}{x^4+3}\,dx$; haciendo $x^4 + 3 = t \Rightarrow dt = 4x^3\,dx$,

luego $\int \frac{x^3}{x^4+3}\,dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{t}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}Lt + C$

Llevando a la última expresión el valor de t, se tiene:

$$\int \frac{x^3}{x^4+3}\,dx = \frac{1}{4}L(x^4+3) + C$$

5.2. La fórmula $\int f[u(x)]u'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C$, que se obtiene haciendo $u(x) = t$, nos permite escribir las siguientes fórmulas de integración:

a) $\int [u(x)]^n u'(x)dx = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

b) $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \int \frac{dt}{t} = L\,t + C = L\,u(x) + C$

c) $\int e^{u(x)}u'(x)dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{u(x)} + C$

d) $\int a^{u(x)}u'(x)dx = \int a^t dt = \frac{a^t}{L\,a} + C = \frac{a^{u(x)}}{L\,a} + C;\quad a > 0,\quad a \neq 1$

e) $\int \operatorname{sen}[u(x)]u'(x)dx = \int \operatorname{sen} t\,dt = -\cos t + C = -\cos[u(x)] + C$

f) $\int \cos[u(x)]u'(x)dx = \int \cos t\,dt = \operatorname{sen} t + C = \operatorname{sen}[u(x)] + C$

g) $\int \frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2[u(x)]}\,dx = \int \frac{dt}{\operatorname{sen}^2 t} = -\cot t + C = -\cot[u(x)] + C$

h) $\int \frac{u'(x)}{\cos^2[u(x)]}\,dx = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}[u(x)] + C$

i) $\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}\,dx = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arc\,sen} t + C = \operatorname{arc\,sen}[u(x)] + C$

j) $\int \frac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}\,dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arc\,tg} t + C = \operatorname{arc\,tg}[u(x)] + C$

Ejemplos:

- Calculemos $\int \frac{2x}{x^2 + 11}\, dx$

  Hacemos $t = x^2 + 11$; $dt = 2x\,dx$

  Entonces: $\int \frac{2x}{x^2 + 11}\, dx = \int \frac{dt}{t} = Lt + C = L(x^2 + 11) + C$

- Calculemos ahora por el método de sustitución la integral $\int x \operatorname{sen} x^2 dx$.

  Hacemos $x^2 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$

  Entonces $\int x \operatorname{sen} x^2 dx = \int \frac{\operatorname{sen} t\, dt}{2} = -\frac{1}{2}\cos t + C =$

  $= \frac{-1}{2}\cos x^2 + C$

- Para calcular $\int \frac{3x^2 + 6x}{\sqrt{x^3 + 3x^2}}\, dx$, hacemos

  $$t = x^3 + 3x^2 \Rightarrow dt = (3x^2 + 6x)dx$$

  Sustituyendo, nos queda:

  $$\int \frac{3x^2 + 6x}{\sqrt{x^3 + 3x^2}}\, dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-1/2} dt = 2t^{1/2} + C$$

  Deshaciendo el cambio, resulta:

  $$\int \frac{3x^3 + 6x}{\sqrt{x^3 + 3x^2}}\, dx = 2(x^3 + 3x^2)^{1/2} + C = 2\sqrt{x^3 + 3x^2} + C$$

- $\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = \int \frac{-(\cos x)'}{\cos x}\, dx = -L\cos x + C$

- Para calcular $\int \frac{x^2}{1 + (x^3 + 2)^2}\, dx$, hacemos $x^3 + 2 = t$;

  $3x^2 dx = dt$. Sustituyendo, resulta:

  $$\int \frac{x^2}{1 + (x^3 + 2)^2}\, dx = \int \frac{\frac{dt}{3}}{1 + t^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg} t =$$

  $$= \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(x^3 + 2) + C$$

- Calculemos $\int e^{-5x} dx$; $-5x = t \Rightarrow -5\,dx = dt$;

  $$\int e^{-5x} dx = \int e^t \frac{dt}{-5} = -\frac{1}{5}\int e^t dt = -\frac{1}{5}e^t + C = -\frac{1}{5}e^{-5x} + C$$

- $\int \frac{4}{\operatorname{sen}^2 4x}\, dx = \int \frac{dt}{\operatorname{sen}^2 t} = -\cot t + C = -\cot 4x + C$

22. Resuelve, por cambio de variable, las siguientes integrales:

a) $\int \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x}\, dx$

b) $\int \cos 5x\, dx$

c) $\int \operatorname{sen} Kx\, dx$

d) $\int \cos Kx\, dx$

e) $\int x\sqrt{1 + 3x^2}$. Haz $1 + 3x^2 = t$

f) $\int x^2 e^{x^3} dx$. Haz $x^3 = t$

g) $\int x\, a^{x^2} dx$

h) $\int (e^x + 1)^3 e^x\, dx$

i) $\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2}\, dx$

j) $\int x \operatorname{sen}(x^2 + 4)\, dx$

k) $\int \frac{x^2}{x^3 + 2}\, dx$

l) $\int \frac{x}{1 + (x^2 + 4)^2}\, dx$

m) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - (x^3 - 1)^2}}\, dx$

n) $\int e^{L\,x} \frac{1}{x}\, dx$

o) $\int e^{-3x} dx$

p) $\int x^2 \operatorname{sen} x^3\, dx$

q) $\int \frac{2x}{1 + x^4}\, dx$

r) $\int \frac{1}{1 + (x + 1)^2}\, dx$

s) $\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\, dx$

6 Integración por partes

Sean $u, v:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ derivables en $]a, b[$. Consideremos su producto $u \cdot v:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$. Se verifica que $u \cdot v$ es derivable y además: $(u\,v)' = vu' + uv' \Rightarrow d(u\,v) = v\,du + u\,d\,v$

Integrando ambos miembros se obtiene: $u \cdot v = \int v\,du + \int u\,dv$, de donde

$$\int \mathbf{u}\,\mathbf{dv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \int \mathbf{v}\,\mathbf{du},$$

que es la fórmula de integración por partes.

Este método de integración suele ser útil en los casos donde el integrando se pueda poner como el producto de una función por la derivada de otra.

Ejemplos:

- Vamos a calcu'ar $\int x \cos x\,dx$

  Haciendo $u = x$, $dv = \cos x\,dx$, resulta:
  $du = 1dx$, $v = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$

  Por tanto, $\int u\,dv = \int x \cos x\,dx$, $u \cdot v = x \operatorname{sen} x$, $\int v\,du = \int \operatorname{sen} x\,dx$

  Aplicando la fórmula de integración por partes, se tiene:

  $$\int x \cos x\,dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

- Integremos por partes $\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$

  Sea $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $dv = dx$, entonces $du = \dfrac{1}{x^2+1}$, $v = \int dx = x$

  Así $\int u\,dv = \int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$; $u \cdot v = x \operatorname{arc\,tg} x$

  $$\int v \cdot du = \int x\,\frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}L(1+x^2)$$

  Aplicando la fórmula de integración por partes, se tiene:

  $$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}L(1+x^2) + C$$

- Calculemos por partes $\int x\,e^x\,dx$.

  Hagamos $u = x$, $dv = e^x\,dx \Rightarrow du = dx$; $v = e^x$

  Entonces $\int \underbrace{e^x}_{v}\,\underbrace{x\,dx}_{du} = \underbrace{x\,e^x}_{u \cdot v} - \underbrace{e^x\,dx}_{v\,du} = x\,e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$

- $\int x^2 e^x\,dx = \int x^2 d\,e^x = x^2 e^x - 2\int e^x x\,dx = x^2 e^x - 2(x\,e^x - \int e^x\,dx) =$

  $$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

23. Integra por partes:

a) $\int x \operatorname{sen} x\,dx$

b) $\int e^x \cos x\,dx$

c) $\int \operatorname{arc\,sen} x\,dx$

d) $\int x^2 \cos x\,dx$

e) $\int L\,x\,dx$

f) $\int x\,L\,x\,dx$

7 Integración de funciones racionales sencillas

El objeto de este apartado es obtener primitivas de funciones racionales cuyo polinomio denominador tenga todas sus raíces reales.

7.1. Consideremos la función racional

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_o}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_o}, \text{ donde } a_m, b_n \neq 0$$

Supongamos que $m < n$ y que $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_o$ tiene todas las raíces reales y distintas: $x_1, x_2 \ldots x_n$

Se demuestra que

$$f(x) = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son números reales fácilmente calculables sin más que, una vez sumadas las fracciones del segundo miembro, igualar entre ambos miembros los coeficientes de igual grado que aparecen en el numerador.

Ejemplo:

- Sabiendo que las raíces del denominador son números enteros, vamos a descomponer en la forma indicada la función

$$f(x) = \frac{5x^2 - 19x + 2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$$

Las tres raíces de la ecuación $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ son, en este caso, divisores del término independiente, luego deben encontrarse entre las $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Por la Regla de Ruffini comprobamos fácilmente que x = 1 es una solución de la ecuación:

	1,	−2,	−5,	6
1		1	−1	−6
	1	−1	−6	0

$; x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)\ (x^2 - x - 6)$

Descomponiendo el polinomio $x^2 - x - 6 = (x+2)\ (x-3)$, resulta:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)\,(x + 2)\,(x - 3)$$

Entonces:

$$\frac{5x^2 - 19x + 2}{(x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x-3} =$$

$$= \frac{A_1(x+2)(x-3) + A_2(x-1)(x-3) + A_3(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)} =$$

$$= \frac{A_1(x^2 - x - 6) + A_2(x^2 - 4x + 3) + A_3(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x+2)(x-3)} =$$

$$= \frac{x^2(A_1 + A_2 + A_3) + x(-A_1 - 4A_2 + A_3) + (-6A_1 + 3A_2 - 2A_3)}{(x-1)(x+2)(x-3)},$$

de donde

$$5x^2 - 19x + 2 = x^2(A_1 + A_2 + A_3) + x(-A_1 - 4A_2 + A_3) + \\ + (-6A_1 + 3A_2 - 2A_3)$$

Para que estos dos polinomios sean iguales se debe verificar:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 5 \\ -A_1 - 4A_2 + A_3 = -19 \\ -6A_1 + 3A_2 - 2A_3 = 2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $A_1 = 2$, $A_2 = 4$, $A_3 = -1$,

por tanto:

$$\frac{5x^2 - 19x + 2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} = \frac{5x^2 - 19x + 2}{(x-1)(x+2)(x-3)} =$$

$$= \frac{2}{x-1} + \frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-3}$$

7.2. Hemos visto cómo se puede descomponer una función racional $f(x) = \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_o}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_o}$, donde $a_m, b_n \neq 0$ y $m < n$, en la forma

$$f(x) = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n}$$

Entonces la integral de una función de este tipo se transforma en una suma de integrales inmediatas:

$$\int f(x)dx = \int \frac{A_1}{x - x_1}\,dx + \int \frac{A_2}{x - x_2}\,dx + \ldots + \int \frac{A_n}{x - x_n}\,dx$$

Ejemplos:

- La integral de la función $f(x) = \dfrac{5x^2 - 19x + 2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$, cuya descomposición se efectuó en el apartado **7.1.**, será:

$$\int \frac{5x^2 - 19x + 2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}\,dx = \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{4}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{x-3}\,dx =$$

$$= 2L(x-1) + 4L(x+2) - L(x-3) + C$$

24. Haz la descomposición en fracciones simples de las funciones racionales:

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 + x - 2}$

b) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 5x + 6}$

• Calculemos la integral $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx$

Se ve que $x^3 + x^2 - 2x = x(x - 1)(x + 2)$, por tanto:

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x - 1} + \frac{A_3}{x + 2} =$$

$$= \frac{A_1(x^2 + x - 2) + A_2(x^2 + 2x) + A_3(x^2 - x)}{x(x - 1)(x + 2)} =$$

$$= \frac{(A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (A_1 + 2A_2 - A_3)x - 2A_1}{x(x - 1)(x + 2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = (A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (A_1 + 2A_2 - A_3)x - 2A_1$$

Para que estos dos polinomios sean iguales se debe verificar:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 1 \\ A_1 + 2A_2 - A_3 = 0 \\ -2A_1 = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $A_1 = -\frac{1}{2}, A_2 = \frac{2}{3}, A_3 = \frac{5}{6}$,

luego:

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx = \int \frac{-\frac{1}{2}}{x}\, dx + \int \frac{\frac{2}{3}}{x - 1}\, dx + \frac{5}{6}\int \frac{dx}{x + 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx = -\frac{1}{2} L\, x + \frac{2}{3} L(x - 1) + \frac{5}{6} L(x + 2) + C$$

• Calculemos $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$. Calculando las raíces del polinomio denominador, se obtiene que $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

Procediendo de forma análoga al ejercicio anterior:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1} \Rightarrow \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A_1(x + 1) + A_2(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{(A_1 + A_2)x + (A_1 - A_2)}{(x - 1)(x + 1)}, \text{ de donde}$$

$$1 = (A_1 + A_2)x + (A_1 - A_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ A_1 - A_2 = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $A_1 = \frac{1}{2}, A_2 = -\frac{1}{2}$

Entonces: $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{1/2}{x - 1}\, dx + \int \frac{-1/2}{x + 1}\, dx =$

$$= \frac{1}{2} L(x - 1) - \frac{1}{2} L(x + 1) + C$$

25. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^2 + 1}{x(x + 1)(x + 3)}\, dx$

b) $\int \frac{dx}{x^2 + x - 6}$

c) $\int \frac{x}{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{4}\right)}\, dx$

d) $\int \frac{dx}{x^2 - 4}$

e) $\int \frac{3x + 2}{x^3 - x}\, dx$

f) $\int \frac{dx}{(x - 2)(x^2 - 9)}$

7.3. Supongamos ahora que en la función

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_o}{b_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_o}, \text{ donde } a_m,\ b_n \neq 0,$$

el grado del polinomio denominador es menor o igual que el del numerador ($n \leqslant m$).

Llamemos $p(x)$, $q(x)$, respectivamente, al polinomio numerador y al polinomio denominador de la función racional $f(x)$.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Dividiendo $p(x)$ por $q(x)$ sabemos que existen dos polinomios únicos $c(x)$ y $r(x)$ tales que $p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$ [1]

Además, el grado de $r(x)$ es estrictamente menor que el grado de $q(x)$ o es el polinomio cero.

Si $r(x)$ es cero, $\int f(x)dx$ se reduce a integrar un polinomio.

Si $r(x) \neq 0$, dividiendo los dos miembros de [1] por $q(x)$ obtenemos:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{q(x) \cdot c(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Por tanto:

$$\int f(x)\,dx = \int c(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx$$

$\int c(x)\,dx$ es la integral de un polinomio y $\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx$ es del tipo de las resueltas en **7.2.**

Ejemplo:

- Vamos a calcular $\int \frac{x^3 + 2}{x - 1}\,dx$

  Dividiendo $x^3 + 2$ por $x + 1$, resulta:

  $x^3 + 2 = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 3$, es decir,

  $\frac{x^3 + 2}{x - 1} = (x^2 + x + 1) + \frac{3}{x - 1}$, luego

$$\int \frac{x^3 + 2}{x - 1}\,dx = \int (x^2 + x + 1)dx + \int \frac{3}{x - 1}\,dx =$$

$$= \int x^2\,dx + \int x\,dx + \int 1\,dx + \int \frac{3}{x - 1}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 3\,L(x - 1) + C$$

26. Calcula las integrales siguientes:

a) $\int \frac{x + 1}{x - 1}\,dx$

b) $\int \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 - 4}\,dx$

c) $\int \frac{x^2 + x}{x^2 - x}\,dx$

d) $\int \frac{x^4 - x^2}{x - 1/2}\,dx$

e) $\int \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x}\,dx$

Ejercicios y cuestiones

27. $\int \frac{4}{x}\,dx$

28. $\int \frac{5}{x^4}\,dx$

29. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\right) dx$

30. $\int \left(2x + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right) dx$

31. $\int \frac{1}{\sqrt{5x}}\,dx$

32. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$

33. $\int \left(\frac{4x^3+8}{x^4+8x} + \frac{1}{x}\right) dx$

34. $\int e^{-6x}\,dx$

35. $\int \frac{dx}{x-2}$

36. $\int \frac{dx}{2x-3}$

37. $\int (e^x + 1)^3\, e^x\,dx$

38. $\int x\, e^{x^2}\,dx$

39. $\int e^x \operatorname{sen} e^x\,dx$

40. $\int x \cos (x^2 + 2)dx$

41. $\int \operatorname{tg} 2x\,dx$

42. $\int \frac{2x}{4+x^4}\,dx$

43. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}\,dx$

44. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

45. $\int \cos x \operatorname{sen} x\,dx$

46. $\int \frac{x+1}{3x^2+6x+2}\,dx$

47. $\int \frac{1+2x}{\sqrt{x+x^2}}\,dx$

48. $\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$

49. $\int x^2\, e^{2x}\,dx$

50. $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$

51. $\int \frac{dx}{x(x-1)(x+2)}$

52. $\int \frac{dx}{x^2-16}$

53. $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$

54. $\int \frac{2x^2+3x-1/2}{x+1}\,dx$

55. $\int \frac{2x+5}{x^2+2x-3}\,dx$

56. $\int \frac{2x+1/2}{(x-1/2)(x+3/4)}\,dx$

TEMA 19 FUNCIONES ESCALONADAS

Al estudiar algunos fenómenos cotidianos aparece un tipo especial de funciones llamadas escalonadas, así el dinero que se va recaudando en el trayecto de un autobús da lugar a una función escalonada; por otra parte, en el próximo tema veremos que una función continua puede aproximarse mediante funciones escalonadas; por esta razón se dedica este tema al estudio de estas funciones.

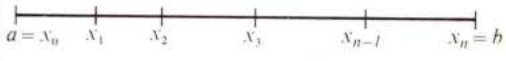
1 Particiones de un intervalo [a, b]

1.1. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado de la recta real, con $a < b$.

Se llama partición de $[a, b]$ a un conjunto $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ de números reales que verifican la condición

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

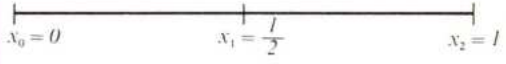
La partición $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ determina en $[a, b]$ los subintervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... $[x_{n-1}, x_n]$ (Fig. 1).



(Fig. 1)

Ejemplo:

- Dado el intervalo [0, 1], el conjunto $P = \{0, 1/2, 1\}$ es una partición de [0, 1]. Esta da lugar a los subintervalos [0, 1/2], [1/2, 1] de [0, 1] (Fig. 2).



(Fig. 2)

1.2. Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Se llama norma de P, y se representa por $|P|$, al mayor de los números $\{(x_1 - x_0), (x_2 - x_1), ..., (x_n - x_{n-1})\}$, es decir:

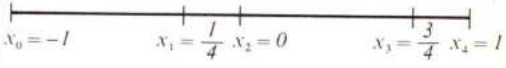
$$|P| = \text{máx. } \{(x_1 - x_0), ..., (x_n - x_{n-1})\}$$

Ejemplos:

- En la partición del apartado **1.1.**:

$$|P| = \text{máx. } \{(1/2 - 0), (1 - 1/2)\} = \{1/2, 1/2,\} = 1/2$$

- $P = \{-1, -1/4, 0, 3/4, 1\}$ es una partición de $[-1, 1]$ (Fig. 3).



(Fig. 3)

Su norma viene dada por

$$|P| = \text{máx. } \{(-1/4 - (-1)), (0 - (-1/4)), (3/4 - 0), (1 - 3/4)\} = \\ = \text{máx. } \{3/4, 1/4, 3/4, 1/4\} = 3/4$$

1.3. Dadas dos particiones,

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\} \text{ y } P' = \{x'_0, x'_1, ..., x'_m\}, \text{ de } [a, b],$$

se dice que P es más fina que P' si $P' \subset P$, es decir, si todo punto de subdivisión de P' es un punto de subdivisión de P.

Ejercicios:

1. Define una partición del intervalo $[-2, 3]$ y calcula su norma.

2. ¿Cuál es la norma de la partición $P = \{0, 1/2, 3/4, 1, 3/2, 2, 3\}$ de $[0, 3]$? Escribe una partición más fina que P y calcula su norma.

Si P es más fina que P' y $P \neq P'$, P tiene más puntos que P', y por tanto todo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ que determina P está contenido en algún subintervalo $[x'_{j-1}, x'_j]$ de P'.

Para expresar que P es más fina que P' escribiremos: $|P| \leqslant |P'|$

Ejemplo:

- Dadas $P = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ y $P' = \{0, 1/2, 1\}$, particiones de $[0, 1]$, P es más fina que P', ya que $P' \subset P$.

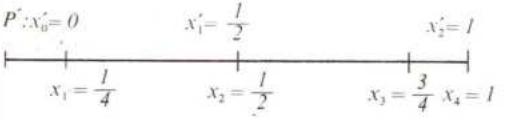
  Observa que todos los subintervalos $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$, $[3/4, 1]$ que determina P están contenidos en algún subintervalo $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$ que determina P'(Fig. 4).

  Se tiene que:

  $|P| = \text{máx. } \{(1/4 - 0), (1/2 - 1/4), (3/4 - 1/2), (1 - 3/4)\} = 1/4$

  $|P'| = \text{máx. } \{(1/2 - 0), (1 - 1/2)\} = 1/2$

  Por tanto, $|P| \leqslant |P'|$, es decir, P es más fina que P'(Fig. 4).

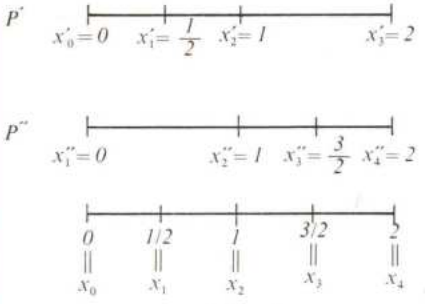


(Fig. 4)

1.4. Dadas las particiones
$P' = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_p\}$ y $P'' = \{x''_0, x''_1, \ldots x''_q\}$ de $[a, b]$,

siempre es posible encontrar otra partición P más fina que las dadas. Basta tomar $P = P' \cup P''$, es decir, la partición cuyos puntos de subdivisión son los de P y los de P'.

Dadas las particiones $P' = \{0, 1/2, 1, 2\}$ y $P'' = \{0, 1, 3/2, 2\}$ de $[0, 2]$, la partición $P' \cup P'' = \{0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$ es más fina que las particiones P' y P''(Fig. 5).



(Fig. 5)

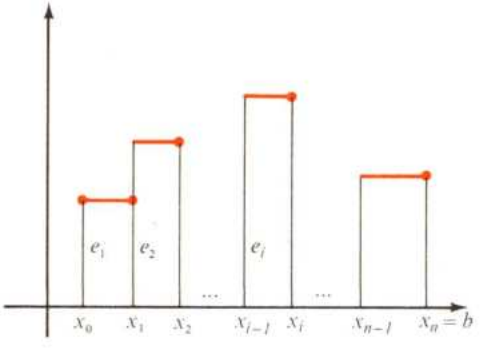
3. Define una partición del intervalo $[0, 1]$ tal que su norma sea menor que $1/4$.

4. Dadas las particiones $P = \{0, 2/3, 1, 2\}$ y $P' = \{0, 1/3, 1, 3/2, 2\}$ de $[0, 2]$, calcula $|P|$ y $|P'|$. Determina una partición del mismo intervalo más fina que P y que P'.

2 Funciones escalonadas

2.1. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Una función $E: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama escalonada cuando toma un valor constante e_i en cada intervalo $]x_{i-1}, x_i]$ que determina la partición P en $[a, b]$, es decir:

$$E(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ e_i & \text{si} \quad x_{i-1} < x \leqslant x_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases} \quad \text{(Fig. 6)}$$



(Fig. 6)

Ejemplos:

- Sea $P = \{0, 1/2, 3/4, 1, 3/2, 2\}$ una partición de $[0, 2]$.

  La función $E: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 1/2 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 3/4 \\ 0 & \text{si} \quad 3/4 < x \leqslant 1 \\ -1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ 1 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

  es una función escalonada (Fig. 7).

- La función $E: [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

  es una función escalonada (Fig. 8).

  Una función escalonada presenta discontinuidades de segunda especie con salto finito en los puntos $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ en el caso que $e_1 \neq e_2$, $e_3 \neq e_4 \ldots e_{n-1} \neq e_n$.

  En el punto x_i el salto viene dado por $e_i - e_{i-1}$ (ver figura 6).

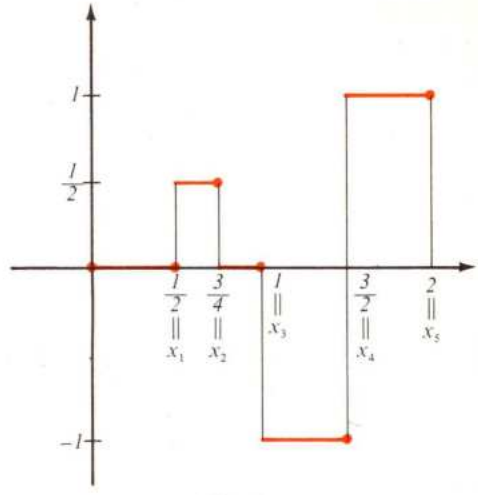
2.2. Sea $P' = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_m\}$ una partición de $[a, b]$ y $E: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalonada definida por

$$E(x) = \begin{cases} e'_1 & \text{si} \quad a = x'_0 \leqslant x \leqslant x'_1 \\ e'_2 & \text{si} \quad x'_1 < x \leqslant x'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_m & \text{si} \quad x'_{m-1} < x \leqslant x'_m = b \end{cases}$$

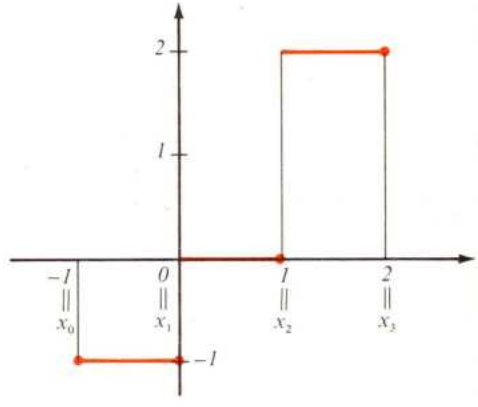
Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ más fina que P'. La función escalonada anterior la podemos definir mediante la nueva partición del modo siguiente:

$$E(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n \end{cases}$$

donde $e_i = e'_j$ si $]x_{i-1}, x_i] \subset]x'_{j-1}, x'_j]$. Esto tiene sentido si recordamos que todo subintervalo que determina P está contenido en algún subintervalo de P', dado que P es más fina que P'.



(Fig. 7)



(Fig. 8)

5. Representa la función escalonada $E: [-2, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ 1 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 0 \\ 1/2 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1/2 \\ 1/4 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

6. Define una función escalonada en el intervalo $[1, 3]$ y represéntala.

7. Define una función escalonada en el intervalo $[0, 2]$ que toma solamente valores negativos. Represéntala.

Ejemplos:

- Sea $P' = \{0, 1/2, 1\}$ una partición de $[0, 1]$. Consideremos la función $E: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 9)}$$

La partición $P = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ es más fina que P' La función E la podemos definir del modo siguiente:

$$E(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/4 \\ 1/2 & \text{si} \quad 1/4 < x \leqslant 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 3/4 \\ 1 & \text{si} \quad 3/4 < x \leqslant 1 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 10)}$$

En este ejemplo, $e'_1 = 1/2, \quad e'_2 = 1$

$$e_1 = 1/2, \quad e_2 = 1/2, \quad e_3 = 1, \quad e_4 = 1$$

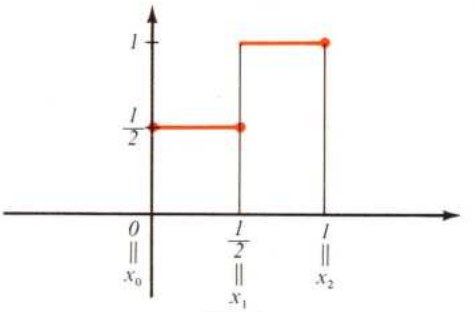
- La función $E: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant -1/4 \\ 2 & \text{si} \quad -1/4 < x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 11)}$$

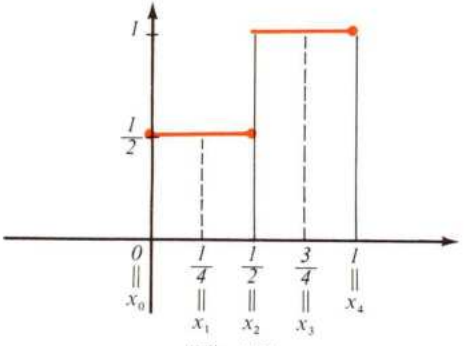
es la misma función que la definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant -1/4 \\ 2 & \text{si} \quad -1/4 < x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 12)}$$

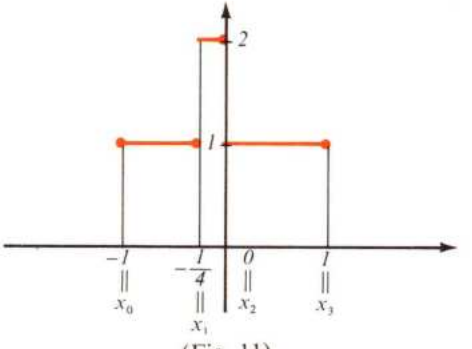
En la primera definición de E utilizamos la partición $P' = \{-1, -1/4, 0, 1\}$; en la segunda, $P = \{-1, -1/4, 0, 1/2, 1\}$, que es más fina que P'.



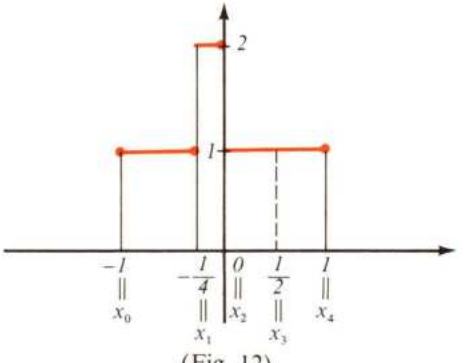
(Fig. 9)



(Fig. 10)



(Fig. 11)



(Fig. 12)

2.3. Como consecuencia de **2.2.**, dadas dos particiones de $[a, b]$,

$P' = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_p\}$ y $P'' = \{x''_0, x''_1, \ldots, x''_q\}$,

y dos funciones escalonadas, E y F, definidas por

$$E(x) = \begin{cases} e'_1 & \text{si} \quad a = x'_0 \leqslant x \leqslant x'_1 \\ e'_2 & \text{si} \quad x'_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_p & \text{si} \quad x'_{p-1} < x \leqslant x'_p = b \end{cases}$$

y

$$F(x) = \begin{cases} e''_1 & \text{si} \quad a = x''_0 \leqslant x \leqslant x''_1 \\ e''_2 & \text{si} \quad x''_1 < x \leqslant x''_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e''_q & \text{si} \quad x''_{q-1} < x \leqslant x''_q = b \end{cases}$$

y considerando la partición $P = P' \cup P'' = \{x_0, x_1 \ldots, x_n\}$ más fina que P' y que P'', podemos definir E y F referidas a la misma partición P:

$$E(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n \end{cases}$$

y

$$F(x) = \begin{cases} d_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ d_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n \end{cases}$$

$e_i = e'_j$ si $]x_{i-1}, x_i] \subset]x'_{j-1}, x_j]$

y $d_i = e''_k$ si $]x_{i-1}, x_i] \subset]x''_{k-1}, x''_k]$.

Según esto, dadas dos funciones escalonadas, definidas en el mismo intervalo, siempre las podemos definir referidas a una misma partición del intervalo.

8. Dada la función escalonada $E: [1, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ -1/2 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 3 \\ 1/2 & \text{si} \quad 3 < x \leqslant 4, \end{cases}$$

escribe dicha función respecto a la partición $P' = \{1, 1/2, 2, 5/2, 3, 7/2, 4\}$.

9. Dada la partición $P = \{-1/2, 0, 1/2, 1\}$ del intervalo $[-1/2, 1]$ y la función escalonada $E: [-1/2, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1/2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

escribe esta misma función mediante una partición de $[-1/2, 1]$ más fina que la dada.

10. Dadas las funciones escalonadas

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \\ 3 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

y

$$F(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ -1 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 3/2 \\ 1/2 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 3, \end{cases}$$

defínelas mediante una misma partición del intervalo $[0, 3]$.

3 Operaciones con funciones escalonadas

De ahora en adelante trabajaremos con funciones escalonadas definidas con la misma partición.

3.1. *Suma de funciones escalonadas*

Sean E', E'': $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones escalonadas y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Supongamos E' y E'' definidas por

$$E'(x) = \begin{cases} e'_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e'_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

y

$$E''(x) = \begin{cases} e''_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e''_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e''_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

La función suma $E = E' + E''$, definida por $E(x) = E'(x) + E''(x)$, es una función escalonada y viene dada por

$$E(x) = \begin{cases} e'_1 + e''_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e'_2 + e''_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n + e''_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

Ejemplos:

- Sean E', E'': $[0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$E'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1/2 \\ 2 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \\ -1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 13)}$$

y

$$E''(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ -2 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 14)}$$

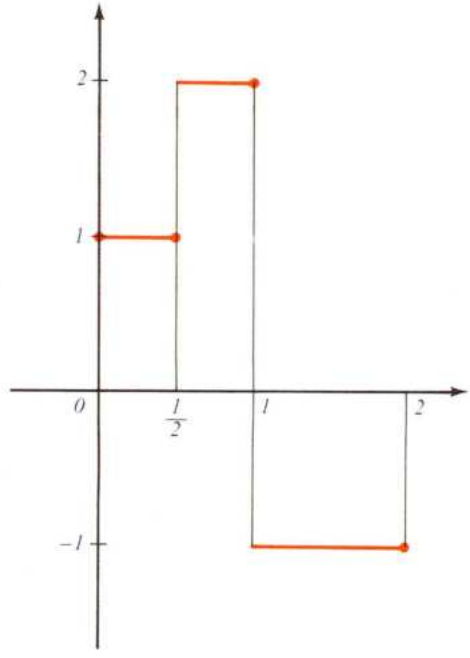
Aquí E' y E'' están definidas, respectivamente, mediante las particiones $P' = \{0, 1/2, 1, 2\}$ y $P'' = \{0, 1, 3/2, 2\}$ de $[0, 2]$. La partición $P = P' \cup P'' = \{0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$ es más fina que ambas.

Las funciones anteriores se pueden escribir:

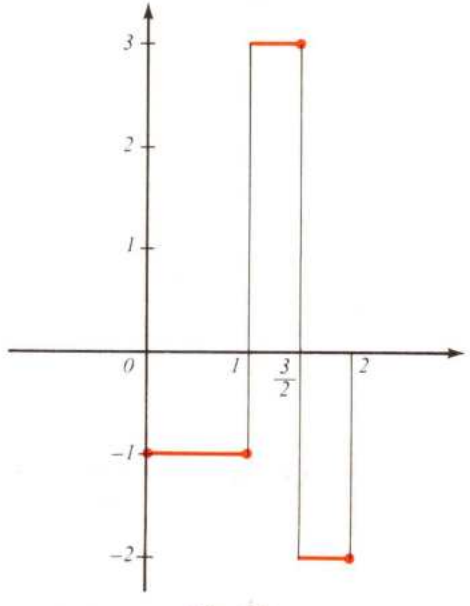
$$E'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 2 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \\ -1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ -1 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

y

$$E''(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ -1 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \\ 3 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ -2 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases}$$



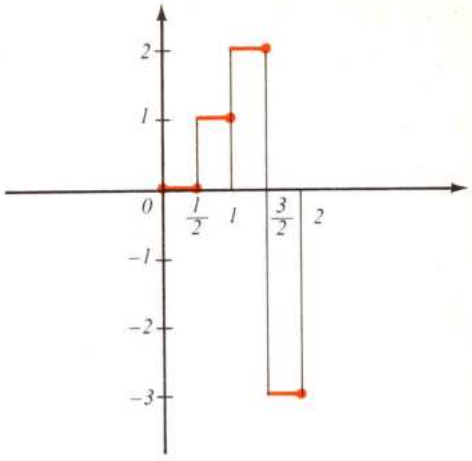
(Fig. 13)



(Fig. 14)

La función $E = E' + E''$: $[0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ viene definida por

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ -3 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 15)}$$



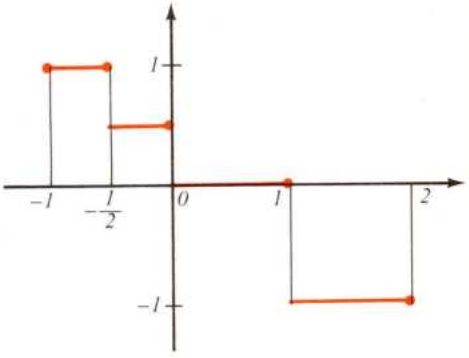
(Fig. 15)

• Sean E', E'': $[-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$E'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant -1/2 \\ 1/2 & \text{si} \quad -1/2 < x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ -1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 16)}$$

y

$$E''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -1 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ 2 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 17)}$$



(Fig. 16)

En este ejemplo:

$P' = \{-1, -1/2, 0, 1, 2\}$; $P'' = \{-1, 0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$;

$P' \cup P'' = \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$

Calculamos el valor de la función $E = E' + E''$

$x \in [-1, -1/2] \Rightarrow E(x) = E'(x) + E''(x) = 1 + (-2) = -1$

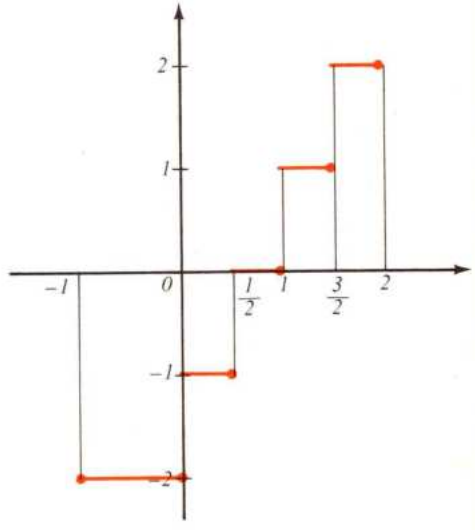
$x \in]-1/2, 0] \Rightarrow E(x) = E'(x) + E''(x) = 1/2 + (-2) = -3/2$

$x \in]0, 1/2] \Rightarrow E(x) = E'(x) + E''(x) = 0 + (-1) = -1$

$x \in]1/2, 1] \Rightarrow E(x) = E'(x) + E''(x) = 0 + 0 = 0$

$x \in]1, 3/2] \Rightarrow E(x) = E'(x) + E''(x) = -1 + 1 = 0$

$x \in]3/2, 2] \Rightarrow E(x) = E'(x) + E''(x) = -1 + 2 = 1$



(Fig. 17)

En consecuencia:

$$E(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant -1/2 \\ -3/2 & \text{si} \quad -1/2 < x \leqslant 0 \\ -1 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ 1 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Se observa que en los intervalos]1/2, 1] y]1, 3/2] la función E toma el mismo valor, por lo cual se puede escribir:

$$E(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant -1/2 \\ -3/2 & \text{si} \quad -1/2 < x \leqslant 0 \\ -1 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 3/2 \\ 1 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 18)}$$

3.2. *Producto de funciones escalonadas por un número real*

Sea $E\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ función escalonada dada por

$$E(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

Si $c \in \mathbb{R}$, la función $cE\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(cE)(x) = cE(x)$ es una función escalonada que toma los valores:

$$(cE)(x) = \begin{cases} c\,e_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ c\,e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c\,e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

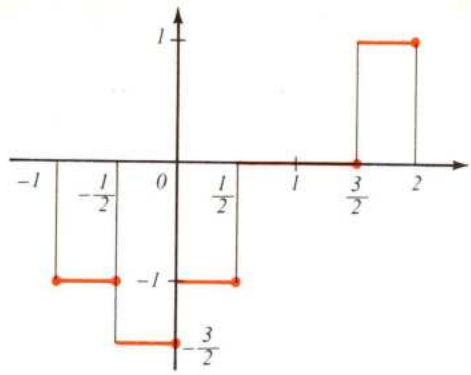
Ejemplos:

- Si $E\colon [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por

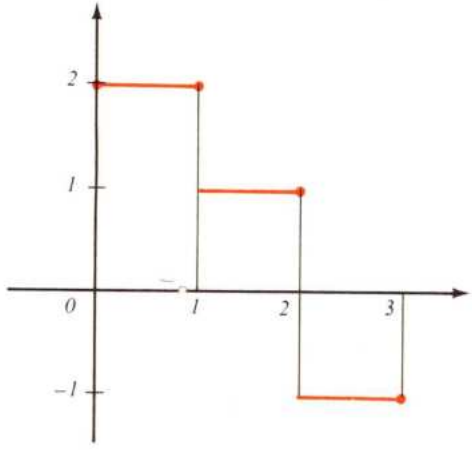
$$E(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \\ -1 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 3 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 19)}$$

la función $1/2\ E\colon [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ viene definida por

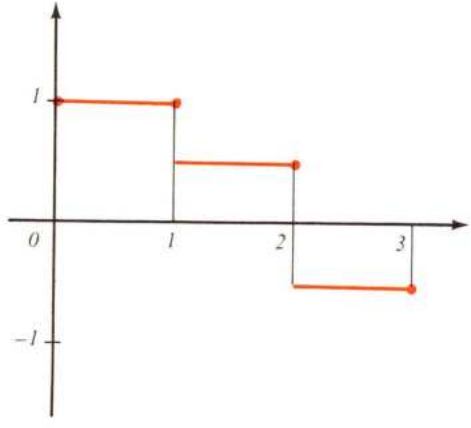
$$(1/2\ E)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1/2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \\ -1/2 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 3 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 20)}$$



(Fig. 18)



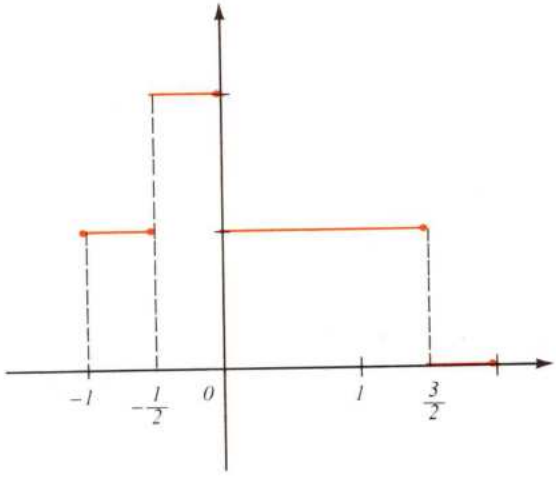
(Fig. 19)



(Fig. 20)

• Consideremos la función $E\colon [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

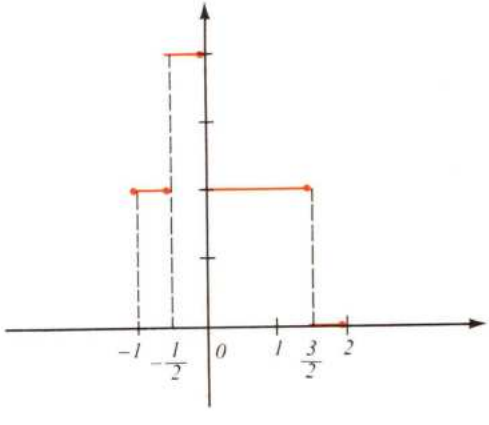
$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant -1/2 \\ 2 & \text{si} \quad -1/2 < x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 3/2 \\ 0 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2, \end{cases} \qquad \text{(Fig. 21)}$$



(Fig. 21)

entonces $2E\colon [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función que viene definida por

$$(2E)(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant -1/2 \\ 4 & \text{si} \quad -1/2 < x \leqslant 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 3/2 \\ 0 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 22)}$$



(Fig. 22)

11. Dadas las funciones $E, E'\colon [-2, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -2 \leqslant x \leqslant -1/2 \\ -1 & \text{si} \quad -1/2 < x \leqslant 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

y

$$E'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ 1 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 0 \\ -1 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

calcula la función $E + E'$.

12. Dadas las funciones $E, E'\colon [0, 1/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/4 \\ -1 & \text{si} \quad 1/4 < x \leqslant 1/2 \end{cases}$$

y

$$E'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/4 \\ 1 & \text{si} \quad 1/4 < x \leqslant 1/2, \end{cases}$$

calcula la función $E + E'$.

13. Calcula $E + E'$ siendo $E, E'\colon [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones escalonadas definidas por

$$E(x) = 2 \qquad \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

y

$$E'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

14. Dada la función escalonada $E\colon [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant -1/2 \\ 1/2 & \text{si} \quad -1/2 < x \leqslant 2/3 \\ 2/3 & \text{si} \quad 2/3 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

calcula las funciones $3E$, $1/2E$, $-E$.

15. Dada la función

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/3 \\ 0 & \text{si} \quad 1/3 < x \leqslant 2/3 \\ 1 & \text{si} \quad 2/3 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

calcula la función $4E(x)$.

4 El espacio vectorial $\mathscr{E}([a, b])$

Llamemos $\mathscr{E}([a, b])$ al conjunto de las funciones escalonadas definidas en $[a, b]$. En el párrafo anterior hemos definido dos operaciones en $\mathscr{E}([a, b])$: la suma de elementos de $\mathscr{E}([a, b])$ y el producto de un elemento de $\mathscr{E}([a, b])$ por un número real.

La primera es una operación interna; la segunda, una operación externa.

Es fácil probar que, respecto de la primera operación, $\mathscr{E}[a,b]$ es un grupo abeliano y que se verifican las propiedades de la operación externa que hacen de $\mathscr{E}[a,b]$ un espacio vectorial.

16. Dadas las funciones E, E': $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$E(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/3 \\ -1 & \text{si} \quad 1/3 \leqslant x \leqslant 2/3 \\ 0 & \text{si} \quad 2/3 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

y

$$E'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/3 \\ 2 & \text{si} \quad 1/3 < x \leqslant 2/3 \\ 0 & \text{si} \quad 2/3 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

calcula $2(E - E')$, $(2E - E')$. ¿Son iguales?

5 Valor absoluto de una función escalonada

Sea E: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ función escalonada definida por

$$E(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

La función $|E|$: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $|E|(x) = |E(x)|$, es una función escalonada que toma los siguientes valores:

$$E(x) = \begin{cases} |e_1| & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ |e_2| & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |e_n| & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

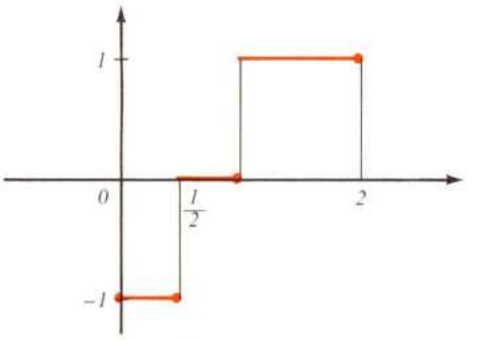
Ejemplos:

- Si E: $[0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función

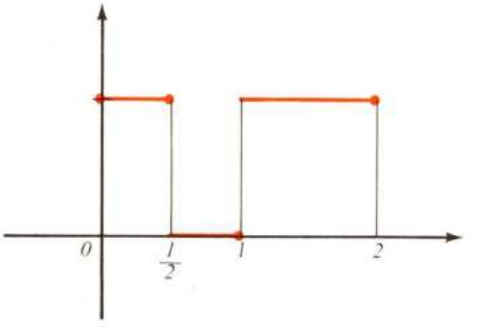
$$E(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2, \end{cases} \qquad \text{(Fig. 21)}$$

la función valor absoluto de E es:

$$|E|(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 22)}$$



(Fig. 23)



(Fig. 24)

Ejercicios y cuestiones

17. En los siguientes pares de particiones indica cuál es más fina y compara sus normas:

a) $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $\quad P' = \{0, 1/2, 1, 2, 5/2, 3, 4\}$

b) $P = \{0, 1/3, 1/2, 3/4, 1\}$ $\quad P' = \{0, 1/3, 1/2, 1\}$

c) $P = \{-1, -1/2, 0, 1\}$ $\quad P' = \{-1, -2/3, -1/2, 0, 1/2, 1\}$

d) $P = \{0, 1, 2, 3\}$ $\quad P' = \{0, 3\}$

18. Demuestra que la relación "ser más fina" entre particiones de un intervalo $[a, b]$ es una relación de orden. ¿Es de orden total?

19. Define una partición P del intervalo $[-1, 1]$ que verifique la propiedad indicada en cada caso:

a) $|P| = 1$

b) $|P| < 1$

c) $|P| \geqslant 1/2$

d) $1/3 < |P| < 1/2$

e) $P' < P$, siendo $P' = \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$ y $P \neq P'$

20. Dadas las particiones $P' = \{-2, -1, -1/2, 1, 2\}$ y $P'' = \{-2, -3/2, -1, 0, 1, 2\}$, escribe una partición más fina que P' y P''.

21. Dadas P' y P'' del problema anterior, escribe una partición P que verifique $P \subset P'$, $P \subset P''$.

22. Representa la función escalonada $E: [-6, -3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{si} \quad -6 \leqslant x \leqslant -5 \\ 2/3 & \text{si} \quad -5 < x \leqslant -4 \\ 1 & \text{si} \quad -4 < x \leqslant -7/2 \\ 4/3 & \text{si} \quad -7/2 < x \leqslant -3 \end{cases}$$

Define E mediante otra partición más fina.

23. Dadas las funciones escalonadas

$$E(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

y

$$E'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

a) calcula $|E|, |E'|, |E - E'|$

b) comprueba que $|E - E'| \leqslant |E| + |E'|$

c) dibuja las gráficas de E, E', $|E|$, $|E'|$ y compáralas.

Tema 20 INTEGRAL DEFINIDA

El objeto de este tema es el de introducir el concepto de integral definida de una función continua.

Se define, primeramente, la integral definida de una función escalonada y se demuestran algunas propiedades importantes, como son: la linealidad, la aditividad respecto a los dominios de integración y el comportamiento respecto al valor absoluto.

Como toda función continua puede "aproximarse" mediante funciones escalonadas, se define la integral de una función continua como un límite de integrales de funciones escalonadas. Se exponen, a continuación, propiedades de esta integral análogas a las demostradas para la integral de las funciones escalonadas.

1 Integral de una función escalonada

En este párrafo introducimos la noción de integral definida para una función escalonada. Si la función es no negativa, la integral nos dará el valor del área encerrada por la gráfica de la función, el eje OX y las ordenadas correspondientes a los puntos del intervalo de integración.

1.1. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$, con $a < b$, y $E: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalonada definida por

$$E(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

Se llama integral de E en el intervalo $[a, b]$ al número

$$e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) + \ldots + e_n(x_n - x_{n-1})$$

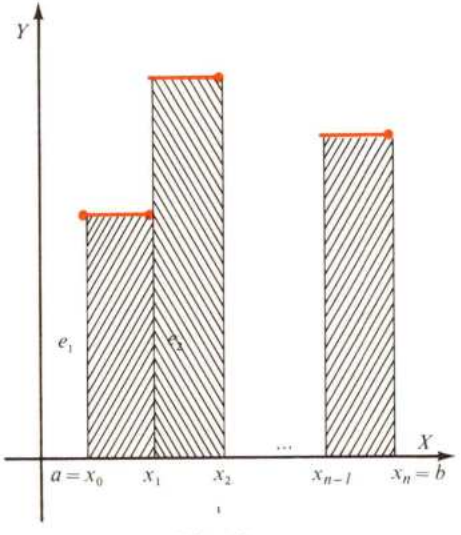
Este número lo representaremos por $\int_a^b E$, o bien $\int_a^b E(x)dx$.

Es decir: $\int_a^b E = \sum_{i=1}^{n} e_i(x_i - x_{i-1})$

En la figura 1 se ha representado una función escalonada, y se observa que las alturas de los rectángulos son ordenadas positivas, es decir, $\forall\ x \in [a, b]$ es $E(x) \geqslant 0$; en este caso el área de cada rectángulo viene definida por

$$e_1(x_1 - x_0),\ e_2(x_2 - x_1),\ \ldots,\ e_n(x_n - x_{n-1})$$

y en consecuencia la suma $\sum_{i=1}^{n} e_i(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b E$ define el área del recinto rayado que determina la función escalonada con el eje OX entre las ordenadas $x = a$ y $x = b$.



(Fig. 1)

Ejemplos:

- Sea la función escalonada $E: [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(Ver figura 2)}$$

Su integral es el número

$$\int_{-1}^{2} E = 1[0 - (-1)] + 0(1 - 0) + 2(2 - 1) = 3$$

Como en este ejemplo es $E(x) \geqslant 0$, $\forall\ x \in [-1, 2]$, el valor de la integral es también el área del recinto rayado de la figura 2.

- Consideremos ahora la función escalonada $E: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida del modo siguiente:

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 1/2 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 3/4 \\ 0 & \text{si} \quad 3/4 < x \leqslant 1 \\ -1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ 1 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(Ver figura 3)}$$

Entonces la integral de la función E $[0, 2]$ es

$$\int_0^2 E = 0(1/2 - 0) + \frac{1}{2}(3/4 - 1/2) + 0(1 - 3/4) +$$

$$+ (-1)(3/2 - 1) + 1(2 - 3/2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

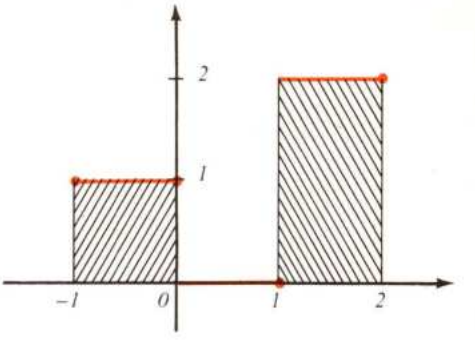
Nota: Observa que, en el segundo ejemplo, las alturas de los rectángulos no son todas ordenadas positivas, por eso la integral $\int_0^2 E$ no coincide con el valor del área del recinto indicado en la figura 3.

1.2. La definición dada para $\int_a^b E$ hace intervenir los puntos de una partición del intervalo $[a, b]$. Veamos a continuación que el valor de la integral es independiente de la elección de estos puntos siempre que se consideren particiones válidas para definir a la misma función E.

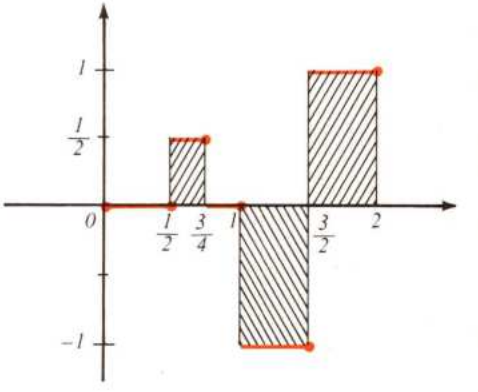
El valor de $\int_a^b E$ es independiente de la partición de $[a, b]$ que utilicemos para definir E.

Sea $d \in [a, b]$ y supongamos que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < d < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$



(Fig. 2)



(Fig. 3)

Ejercicios:

1. Calcula $\int_0^3 E$ siendo E la función

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \\ 3 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

2. Dada la función escalonada

$E: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant -1/2 \\ 1/2 & \text{si} \quad -1/2 < x \leqslant 2/3 \\ 2/3 & \text{si} \quad 2/3 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

calcula el valor del área que determina E con el eje OX entre las ordenadas de ecuaciones $x = -1$ y $x = 1$.

Según esta nueva partición, la función $E\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ la podemos definir como:

$$E(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_i & \text{si} \quad x_{i-1} < x \leqslant d \\ e_i & \text{si} \quad d < x \leqslant x_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

Según esta nueva forma de escribir E, se tiene el siguiente valor de la integral:

$$\int_a^b E = e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) + \ldots + e_i(d - x_{i-1}) +$$
$$+ e_i(x_i - d) + \ldots + e_n(x_n - x_{n-1}) = e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) +$$
$$+ \ldots + e_i d - e_i x_{i-1} + e_i x_{i-1} - e_i d + \ldots + e_n(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) + \ldots + e_i(x_i - x_{i-1}) + \ldots + e_n(x_n - x_{n-1}),$$

que es el mismo obtenido para $\int_a^b E$ con la partición P en **1.1.**

Ejemplos:

- Sea $E\colon [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2/3 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{(Ver figura 4)}$$

Esta función la podemos expresar también del modo siguiente:

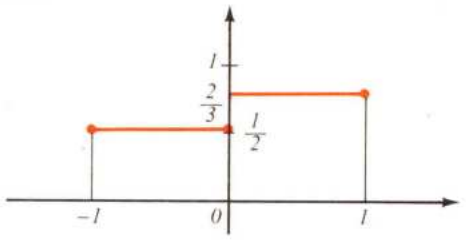
$$E(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant -1/2 \\ 1/2 & \text{si} \quad -1/2 < x \leqslant 0 \\ 2/3 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1/2 \\ 2/3 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{(Ver figura 5)}$$

En el primer caso:

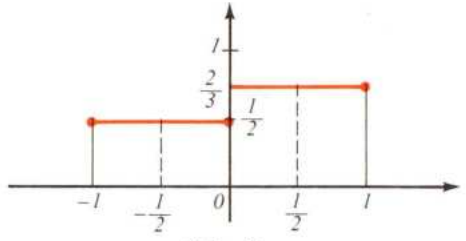
$$\int_{-1}^{1} E = \frac{1}{2}(0 - (-1)) + \frac{2}{3}(1 - 0) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

En el segundo caso obtenemos:

$$\int_{-1}^{1} E = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - (-1)\right) + \frac{1}{2}\left(0 - (-\frac{1}{2})\right) +$$
$$+ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - 0\right) + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}$$



(Fig. 4)



(Fig. 5)

3. Calcula $\int_0^2 E$, estando E definida del modo siguiente:

$$E(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ 3/2 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

4. La función escalonada

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

también se puede definir por

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ 2 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Comprueba que el valor de $\int_0^2 E$ es el mismo para las dos definiciones de E.

5. Comprueba que para las funciones

$$E(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -1/2 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

y

$$E'(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant -1/2 \\ 1/2 & \text{si} \quad -1/2 < x \leqslant 0 \\ -1/2 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

se tiene: $\int_{-1}^{1} E = \int_{-1}^{1} E'$

• Sean $P = \{0, 1, 3/2, 2\}$ y $P' = \{0, 1/2, 1, 3/2, 2\}$ dos particiones de $[0, 2]$. Consideremos la función $E: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida del modo siguiente:

$$E(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ 1 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(Ver figura 6)}$$

Su integral viene dada por

$$\int_0^2 E = (-2)(1-0) + (-1)(3/2-1) + 1(2-3/2) =$$

$$= (-2) + (-1/2) + 1/2 = -2$$

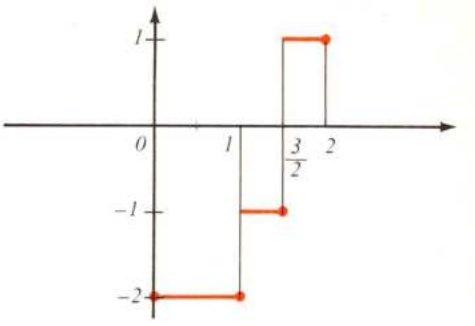
Veamos que si definimos E mediante la partición P'

$$E(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ -2 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \\ -1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ 1 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(Ver figura 7)}$$

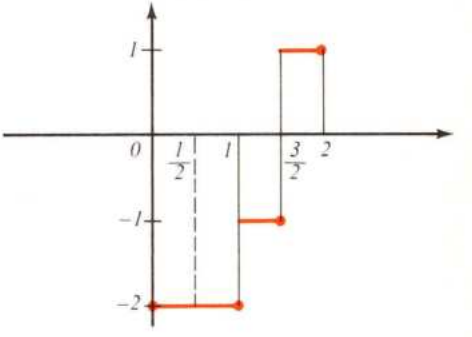
se obtiene para $\int_0^2 E$ el mismo valor que cuando se define E mediante la partición P.

$$\int_0^2 E = (-2)(1/2-0) + (-2)(1-1/2) +$$

$$+ (-1)(3/2-1) + 1(2-3/2) = -2$$



(Fig. 6)



(Fig. 7)

2 Propiedades de la integral de funciones escalonadas

Hemos visto que la integral de una función escalonada E no depende de las particulares subdivisiones de su intervalo de definición; en consecuencia, dadas dos funciones escalonadas: $E', E'': [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$E'(x) = \begin{cases} d'_1 & \text{si} \quad a = x'_0 \leqslant x \leqslant x'_1 \\ d'_2 & \text{si} \quad x'_1 < x \leqslant x'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d'_p & \text{si} \quad x'_{p-1} < x \leqslant x'_p = b \end{cases}$$

y

$$E''(x) = \begin{cases} d''_1 & \text{si} \quad a = x''_0 \leqslant x \leqslant x''_1 \\ d''_2 & \text{si} \quad x''_1 < x \leqslant x''_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d''_q & \text{si} \quad x''_{q-1} < x \leqslant x''_q = b, \end{cases}$$

podemos definirlas mediante la misma partición P

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} = \{x'_0, x'_1, \dots, x'_p\} \cup \{x''_0, x''_1, \dots, x''_q\}$$

Así:

$$E'(x) = \begin{cases} e'_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e'_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e'_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

y

$$E''(x) = \begin{cases} e''_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e''_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e''_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n \end{cases}$$

donde $\begin{cases} e'_i = d'_j & \text{si} \quad]x_{i-1}, x_i] \subset]x'_{j-1}, x'_j]; \\ e''_i = d''_k & \text{si} \quad]x_{i-1}, x_i] \subset]x''_{k-1}, x''_k] \end{cases}$

2.1. *Propiedad aditiva respecto a la función*

Sean E', E'': $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones escalonadas definidas por

$$E'(x) = \begin{cases} e'_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e'_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e'_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

y

$$E''(x) = \begin{cases} e''_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e''_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e''_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

Entonces: $\int_a^b (E' + E'') = \int_a^b E' + \int_a^b E''$

En efecto:

La función escalonada $E' + E''$: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$(E' + E'')(x) = \begin{cases} e'_1 + e''_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e'_2 + e''_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e'_n + e''_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n \end{cases}$$

Por tanto:

$$\int_a^b (E + E') = (e'_1 + e''_1)(x_1 - x_0) + (e'_2 + e''_2)(x_2 - x_1) +$$
$$+ \dots + (e'_n + e''_n)(x_n - x_{n-1}) = [e'_1(x_1 - x_0) + e'_2(x_2 - x_1) +$$
$$+ \dots + e'_n(x_n - x_{n-1})] + [e''_1(x_1 - x_0) + e''_2(x_2 - x_1) +$$
$$+ \dots + e''_n(x_n - x_{n-1})] = \int_a^b E' + \int_a^b E''$$

Ejemplos:

- Dadas las funciones escalonadas E'', E': $[0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$E'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 2 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \\ -1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

y

$$E''(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ -2 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

sus integrales en $[0, 2]$ son:

$$\int_0^2 E' = 1(1/2 - 0) + 2(1 - 1/2) + (-1)(2 - 1) = 1/2$$

$$\int_0^2 E'' = (-1)(1 - 0) + 3(3/2 - 1) + (-2)(2 - 3/2) = -1/2$$

Por tanto:

$$\int_0^2 (E' + E'') = \int_0^2 E' + \int_0^2 E'' = \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

- Sean las funciones escalonadas E', E'': $[-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$E'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

y

$$E''(x) = 1 \quad \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

Tenemos:

$$\int_{-1}^1 E' = 1\big(0 - (-1)\big) + 2(1 - 0) = 3$$

$$\int_{-1}^1 E'' = 1\big(1 - (-1)\big) = 2,$$

luego:

$$\int_{-1}^1 (E' + E'') = \int_{-1}^1 E' + \int_{-1}^1 E'' = 3 + 2 = 5$$

2.2. Si E: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalonada definida por

$$E(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

y $c \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\int_a^b c\,E = c \int_a^b E$$

6. Dadas las funciones escalonadas

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 3/2 \\ 1/2 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

y

$$E'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ 1 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

calcula $\int_0^2 (E + E')$

7. Dadas las funciones escalonadas

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 5 \leqslant x \leqslant 6 \\ -2 & \text{si} \quad 6 < x \leqslant 7 \\ 1 & \text{si} \quad 7 < x \leqslant 9 \end{cases}$$

y

$$E'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 5 \leqslant x \leqslant 7 \\ -6 & \text{si} \quad 7 < x \leqslant 9, \end{cases}$$

comprueba que se verifica:

$$\int_5^9 (E + E') = \int_5^9 E + \int_5^9 E'$$

En efecto: la función $cE: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$(cE)(x) = \begin{cases} ce_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ ce_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ce_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

Entonces:

$$\int_a^b cE = (ce_1)(x_1 - x_0) + (ce_2)(x_2 - x_1) + \ldots + (ce_n)(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= c[e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) + \ldots + e_n(x_n - x_{n-1})] = e\int_a^b E$$

luego:

$$\int_a^b c\,E = c\int_a^b E$$

Ejemplos:

- La función escalonada $E: [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 4/3 \\ -1 & \text{si} \quad 4/3 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

tiene por integral

$$\int_1^2 E = 1(4/3 - 1) + (-1)(2 - 4/3) = \frac{1}{3} + (-1)\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

La función $3E: [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$(3E)(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 4/3 \\ -3 & \text{si} \quad 4/3 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

tiene por integral

$$\int_1^2 3E = 3\int_1^2 E = 3\left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

- La función $E: [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $E(x) = 1$

$\forall\ x \in [0, a]$ tiene por integral $\int_0^a E = 1(a - 0) = a$

Por tanto, la función $E': [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $E'(x) = b$ $\forall\ x \in [0, a]$ tendrá por integral

$$\int_0^a E' = \int_0^a b \cdot E = b\int_0^a E = b \cdot a$$

2.3. Consideremos la función $E: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

Se verifica:

$$\left|\int_a^b E\right| \leqslant \int_a^b |E|$$

8. Dada la función escalonada

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 3/2 \\ 1/2 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

calcula $\displaystyle\int_0^2 \left(-\frac{3}{2}\right) E$

9. Demuestra que si $E, E': [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones escalonadas, se tiene

$$\int_a^b (E - E') = \int_a^b E - \int_a^b E'$$

10. Calcula $\int_2^4 (6E - 4/5\,E')$ siendo $E, E': [2, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones escalonadas definidas por

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ -1/2 & \text{si} \quad 3 < x \leqslant 4 \end{cases}$$

y

$$E'(x) = \quad 5 \quad \text{si} \quad 2 \leqslant x \leqslant 4$$

Es decir, el valor absoluto de la integral es menor o igual que la integral del valor absoluto.

En efecto: la función $|E|$: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$|E|(x) = \begin{cases} |e_1| & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ |e_2| & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |e_n| & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

Entonces, teniendo en cuenta las propiedades del valor absoluto, se tiene:

$$\left|\int_a^b E\right| = |e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) + \ldots + e_n(x_n - x_{n-1})| \leqslant$$
$$\leqslant |e_1(x_1 - x_0)| + |e_2(x_2 - x_1)| + \ldots + |e_n(x_n - x_{n-1})| =$$
$$= |e_1||x_1 - x_0| + |e_2||x_2 - x_1| + \ldots + |e_n||x_n - x_{n-1}|$$

Como los números $(x_1 - x_0)$, $(x_2 - x_1)$, ..., $(x_n - x_{n-1})$ son todos mayores o iguales que cero, lo anterior lo podemos escribir del modo siguiente:

$$\left|\int_a^b E\right| \leqslant |e_1|\,(x_1 - x_0) + |e_2|\,(x_2 - x_1) + \ldots + |e_n|\,(x_n - x_{n-1}) = \int_a^b |E|$$

Ejemplos:

- Consideremos E: $[1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 3/2 \\ -1 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

La función $|E|$: $[1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ viene definida por

$$|E|(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 3/2 \\ 1 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

Calculemos ahora $\int_1^3 E$ y $\int_1^3 |E|$

$$\left|\int_1^3 E\right| = |2(3/2 - 1) + (-1)(2 - 3/2) + 2(3 - 2)| = 1 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$\int_1^3 |E| = 2(3/2 - 1) + 1(2 - 3/2) + 2(3 - 2) = 1 + \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

Observa que se verifica:

$$\left|\int_1^3 E\right| \leqslant \int_1^3 |E|$$

11. Dada la función escalonada

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ -1/2 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 3/2 \end{cases}$$

comprueba que $\left|\int_0^{3/2} E\right| \leqslant \int_0^{3/2} |E|$

12. Demuestra que si E, E': $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones escalonadas, se verifica:

$$\left|\int_a^b (E + E')\right| \leqslant \int_a^b |E| + \int_a^b |E'|$$

2.4. Si $E: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica la condición $E(x) \geqslant 0$ $\forall\ x \in [a, b]$, se tiene que $E = |E|$. Por tanto:

$$\left|\int_a^b E\right| \leqslant \int_a^b |E| = \int_a^b E$$

Como por otra parte $\int_a^b E \leqslant \left|\int_a^b E\right|$, resulta que:

$$\int_a^b E = \left|\int_a^b E\right| \text{ y como } \left|\int_a^b E\right| \geqslant 0, \text{ se tiene que } \int_a^b E \geqslant 0$$

Obtenemos así este importante resultado:

$$E(x) \geqslant 0\ \forall\ x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b E \geqslant 0$$

Nota: Hemos visto (Tema 19) que si $E: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función escalonada, $|E|$ es otra función escalonada que verifica $|E|(x) = |E(x)| \geqslant 0, \forall\ x \in [a, b]$, por tanto su representación gráfica está situada encima del eje OX y $\int_a^b |E|$ medirá el área que encierra la gráfica de $|E|$ con OX entre las ordenadas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$; esta área es igual a la que determina la gráfica de E con el eje OX entre las mismas ordenadas.

Ejemplo:

- Sea $E: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

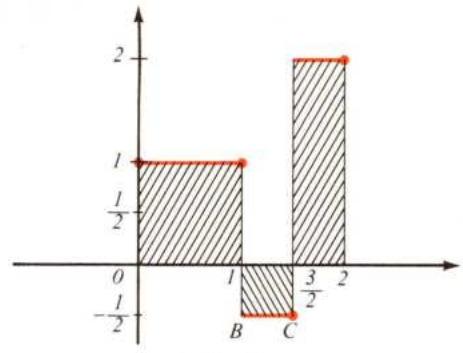
$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1/2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ 2 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(Ver figura 8)}$$

La función $|E|: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida del modo siguiente:

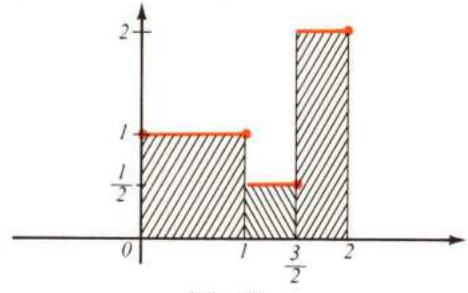
$$|E|(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1/2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ 2 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(Ver figura 9)}$$

Se observa en las figuras 8 y 9 que las dos funciones E y $|E|$ determinan con el eje OX recintos de igual área, pero el rectángulo, que en el caso de la función E (Fig. 8) está por debajo del eje OX, en la función $|E|$ aparece sobre dicho eje; luego el área del recinto que determina la gráfica de E con el eje OX entre las ordenadas $x = 0$ y $x = 2$ es

$$\int_0^2 |E| = 1(1 - 0) + \frac{1}{2}(3/2 - 1) + 2(2 - 3/2) = 1 + \frac{1}{4} + 1 = \frac{9}{4}$$



(Fig. 8)



(Fig. 9)

13. Dadas las funciones escalonadas

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -2 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

y

$$E'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 0 \\ 1/2 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1/2 \\ 2 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

calcula: $\int_{-1}^{1} E, \int_{-1}^{1} |E|, \left|\int_{-1}^{1} E\right|, \int_{-1}^{1} (E + E')$

14. Calcula el área que determina la función

$$E(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant -1/2 \\ -2/3 & \text{si} \quad -1/2 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

con el eje OX entre las ordenadas $x = -1$, $x = 2$

15. Calcula el área que determina la función

$$E(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 0 \end{cases}$$

con el eje OX entre las ordenadas de ecuaciones $x = -2$, $x = 0$

2.5. *Propiedad aditiva respecto al intervalo*

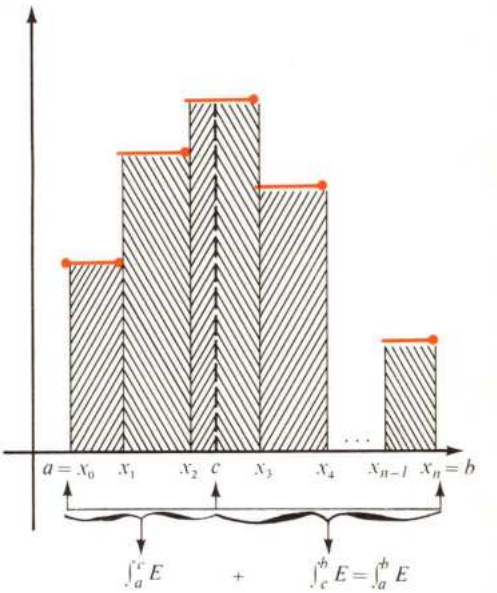
Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y sea la función escalonada $E: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

Si $c \in [a, b]$, entonces $\int_a^b E = \int_a^c E + \int_c^b E$

Nota: Si $E(x) \geqslant 0, \forall\ x \in [a, b]$, sabemos que $\int_a^b E$ es el valor del área que determina la gráfica de E y el eje OX entre las ordenadas $x = a, x = b$. Por otra parte, $\int_a^c E$ y $\int_c^b E$ son los valores de las áreas determinadas por la gráfica de E y el eje OX entre las ordenadas $x = a$, $x = c$ la primera, y entre las ordenadas $x = c$, $x = b$ la segunda.

Este significado geométrico está indicado en la figura 10.



(Fig. 10)

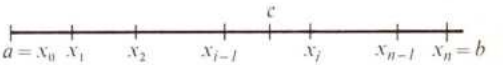
Demostremos esta propiedad.

Si $c \in [a, b]$, c estará en alguno de los intervalos $[x_0, x_1]$ $]x_1, x_2]$, ..., $]x_{n-1}, x_n]$ que determinan la partición.

Supongamos (Fig. 11) que la situación es:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} \leqslant c \leqslant x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

El punto $c \in [a, b]$ junto con la partición P determinan una partición $P' = \{x_0, x_1, ..., x_{i-1}, c\}$ de $[a, c]$ y otra partición $P'' = \{c, x_i, x_{i+1}, ..., x_n\}$ de $[c, b]$.



(Fig. 11)

Como $E(x) = e_i$ si $x \in]x_{i-1}, x_i]$, resulta que $E(x) = e_i$ si $x \in]x_{i-1}, c]$ o $x \in [c, x_i]$

Entonces:

$$\int_a^c E = e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) + \ldots + e_i(c - x_{i-1})$$

$$\int_c^b E = e_i(x_i - c) + e_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \ldots + e_n(x_n - x_{n-1})$$

Sumando ambas igualdades, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_a^c E + \int_c^b E &= e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) + \ldots + e_i(c - x_{i-1}) + \\ &+ e_i(x_i - c) + e_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \ldots + e_n(x_n - x_{n-1}) = \\ &= e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) + \ldots + e_i\, c - e_i\, x_{i-1} + e_i\, x_i - \\ &- e_i\, c + e_{i+1}\,(x_{i+1} - x_i) + \ldots + e_n(x_n - x_{n-1}) = \\ &= e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) + \ldots + e_i(x_i - x_{i-1}) + \\ &+ \ldots + e_n(x_n - x_{n-1}) = \int_a^b E \end{aligned}$$

Luego podemos escribir:

$\int_a^c E + \int_c^b E = \int_a^b E$ o también: $\int_a^c E(x)dx + \int_c^b E(x)dx = \int_a^b E(x)dx$

Ejemplo:

- Dada la función $E: [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ 2 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 0 \\ 3 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

El punto $\frac{1}{2} \in [-2, 2]$, junto con la partición

$$P = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \text{ de } [-2, 2],$$

utilizada para definir E, determina dos particiones:

$$P' = \left\{-2, -1, 0, \frac{1}{2}\right\} \text{de} \left[-2, \frac{1}{2}\right] \text{ y } P'' = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\} \text{de} \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

Por otra parte, como $\frac{1}{2} \in [0, 1]$, se tiene que

$$\left]0, \frac{1}{2}\right] \subset [0, 1] \text{ y } \left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset]0, 1].$$

De estas inclusiones se deduce que

si $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, entonces $E(x) = 3$

si $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, entonces $E(x) = 3$

Por tanto, se tiene

$$\int_{-2}^{1/2} E = 1\,[-1 - (-2)] + 2\,(0 - (-1)) + 3(1/2 - 0) =$$

$$= 1 + 2 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

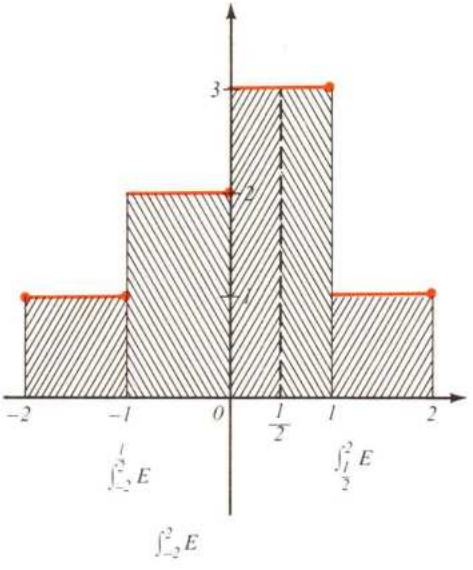
$$\int_{1/2}^{2} E = 3(1 - 1/2) + 1(2 - 1) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

Luego: $\int_{-2}^{2} E = \int_{-2}^{1/2} E + \int_{1/2}^{2} E = \frac{9}{2} + \frac{5}{2} = 7$ (Fig. 12)

Observa que utilizando la partición P inicial se obtiene el mismo valor para la integral.

$$\int_{-2}^{2} E = 1\,[-1 - (-2)] + 2\,(0 - (-1)) + 3(1 - 0) + 1(2 - 1) =$$

$$= 1 + 2 + 3 + 1 = 7$$



(Fig. 12)

2.6. Sea $E: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalonada.

Admitiremos que $\int_a^a E = 0$

Desde el punto de vista geométrico, este convenio queda justificado por el hecho de que $\int_a^a E$ representa el área de un rectángulo de base $a - a = 0$.

16. Comprueba que $\int_1^3 E = \int_1^2 E + \int_2^3 E$ donde E está definida por

$$E(x) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 5/2 \\ 3/2 & \text{si} \quad 5/2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

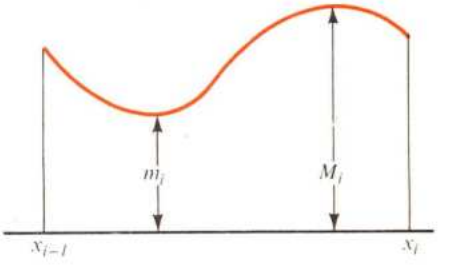
3 Aproximación de una función continua mediante funciones escalonadas

El problema de la integral de una función real de variable real está ligado al de cálculo de áreas de recintos planos cuyos bordes no estén constituidos por segmentos, sino por líneas más generales, como es el caso de recintos limitados por gráficas de funciones continuas. Para calcular el área de un recinto de este tipo intentaremos aproximar éste mediante otro de bordes más sencillos cuya área podamos calcular fácilmente. Esta es la idea intuitiva que desarrollamos a continuación.

Sea $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Consideremos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y supongamos que $f(x) \geqslant 0, \forall\ x \in [a, b]$.

Llamaremos M_1, m_1, respectivamente, al mayor y menor valor que toma f en $[x_0, x_1]$. Análogamente, M_2, m_2 representan al mayor y menor valor que toma f en $[x_1, x_2]$, etc.

En general, M_i, m_i representa los valores extremos, máximo y mínimo, que toma f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ (Fig. 13).



(Fig. 13)

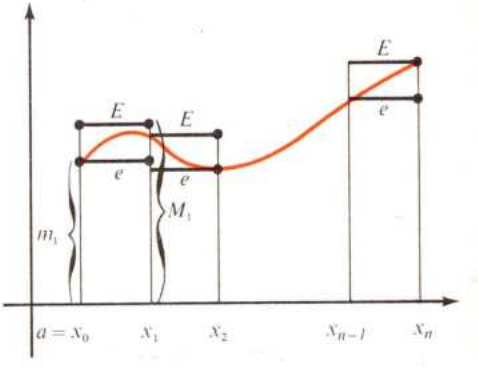
Definamos dos funciones escalonadas E, $e\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de la manera siguiente:

$$E(x) = \begin{cases} M_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ M_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

(Ver figura 14)

y

$$e(x) = \begin{cases} m_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ m_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$



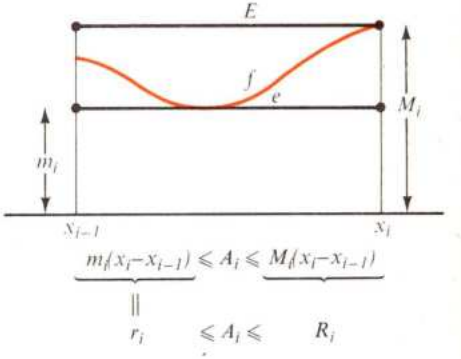
(Fig. 14)

En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ correspondiente a la partición P quedan determinados tres recintos limitados por el eje OX y las funciones e, f y E entre las ordenadas $x = x_{i-1}$ y $x = x_i$ (Fig. 15).

Si llamamos r_i, A_i, R_i a las áreas de las figuras limitadas por e, f, E respectivamente, tenemos que $r_i \leqslant A_i \leqslant R_i$

Como $r_i = m_i(x_i - x_{i-1})$ y $R_i = M_i(x_i - x_{i-1})$,

resulta que $m_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant A_i \leqslant M_i(x_{i-1})$



(Fig. 15)

Sumando las desigualdades que se obtienen para cada uno de los intervalos de P, resulta:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} A_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Intuitivamente se comprende que $\sum_{i=1}^{n} A_i = A$ es precisamente el área del recinto determinado por la gráfica de f y el eje OX entre las ordenadas $x = a$ y $x = b$.

Según la definición de integral para funciones escalonadas, se obtiene que $\int_a^b e \leqslant A \leqslant \int_a^b E$

Las integrales $\int_a^b e$ y $\int_a^b E$ son, pues, aproximaciones por defecto y por exceso al valor del área A.

Nota: Si la función $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ no está sujeta a la restricción $f(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in [a, b]$, todos los resultados anteriores siguen siendo válidos, aunque tanto las integrales, $\int_a^b e$, $\int_a^b E$, como A no correspondan a los valores de las áreas de los recintos antes mencionados.

Intuitivamente se observa que, cuanto más pequeños sean los intervalos de la partición (dicho de otra forma: cuando vamos haciendo más pequeña la norma de la partición), más se aproximarán las dos funciones escalonadas a la función f y por consiguiente los números $\int_a^b e$, $\int_a^b E$ al área A. Cuando la norma se aproxima a 0, los números $\int_a^b e$, $\int_a^b E$ tienden a coincidir con A.

4 Integral de una función continua en un intervalo cerrado

4.1. Sean $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y E, $e: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones escalonadas definidas por

$$E(x) = \begin{cases} M_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ M_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

y

$$e(x) = \begin{cases} m_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ m_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

donde M_i, m_i son el máximo y mínimo valor que toma f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$

Los razonamientos que siguen no tienen el valor de demostraciones rigurosas; sirven para dar forma matemática a lo que nos dice la intuición según las consideraciones anteriores.

De lo dicho en el apartado 3 se deduce que

$$0 \leqslant \int_a^b E - \int_a^b e = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

Admitiremos que por ser f continua en el intervalo $[a, b]$ se verifica: $\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0, |x - x'| < \delta \Rightarrow f(x) - f(x') < \epsilon$

Tomando una partición P tal que $|P| < \delta$, entonces

$$(M_1 - m_1) < \epsilon, (M_2 - m_2) < \epsilon, \ldots, (M_n - m_n) < \epsilon$$

con lo que $0 \leqslant \int_a^b E - \int_a^b e \leqslant \sum_{i=1}^{n} \epsilon(x_i - x_{i-1}) = \epsilon(b - a)$

Lo cual nos dice que fijado un número real $\epsilon > 0$ tan pequeño como queramos, existe otro número $\delta > 0$ tal que la diferencia (positiva) entre las integrales de las funciones escalonadas E y e es menor que el número $\epsilon(b - a)$, también muy pequeño, siempre que la norma $|P|$ de la partición sea inferior a δ.

Se deduce entonces que si hacemos en el intervalo $[a, b]$ sucesivas particiones $P_1, P_2, \ldots, P_m \ldots$ de modo que $\lim_{m \to \infty} |P_m| < 0$, a partir de una de ellas ocurrirá para todas las siguientes que $|P_m| < \delta$ y, por tanto, que

$$\int_a^b E_m - \int_a^b e_m < \epsilon(b - a)$$

Resulta, pues, que $\lim_{m \to \infty} \left[\int_a^b E_m - \int_a^b e_m\right] = 0$

Pero sabemos que las sucesiones $\left(\int_a^b E_m\right)$ y $\left(\int_a^b e_m\right)$

deben ser convergentes por ser monótonas,

luego $\lim_{m \to \infty} \int_a^b E_m = \lim_{m \to \infty} \int_a^b e_m$

Como la integral $\int_a^b f$, de acuerdo con la interpretación geométrica anterior, está siempre comprendida entre $\int_a^b E_m$ y $\int_a^b e_m$ se comprende que

$$\lim_{m \to \infty} \int_a^b E_m = \int_a^b f = \lim_{m \to \infty} \int_a^b e_m$$

Este resultado nos permite dar la siguiente definición:

4.2. *Dada la función* $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *llamamos integral definida de* f *en* $[a, b]$ *(o simplemente integral en* $[a, b]$*), y la representaremos por* $\int_a^b f$ *o* $\int_a^b f(x)dx$, *al valor* $\lim_{m \to \infty} \int_a^b E_m = \lim_{m \to \infty} \int_a^b e_m$

5 Propiedades de la integral de una función continua

Las siguientes propiedades de la integral de una función continua son análogas a las deducidas para funciones escalonadas, y son consecuencia de éstas y de la definición de integral de una función continua.

5.1. *Propiedad aditiva respecto de la función*

Sean $f, g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$; entonces se verifica la siguiente propiedad:

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

o también:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

5.2. Sea $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$; entonces se verifica: $\int_a^b cf = c\int_a^b f$

Con la segunda notación, esta propiedad se escribe:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

5.3. Consideremos la función $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$.

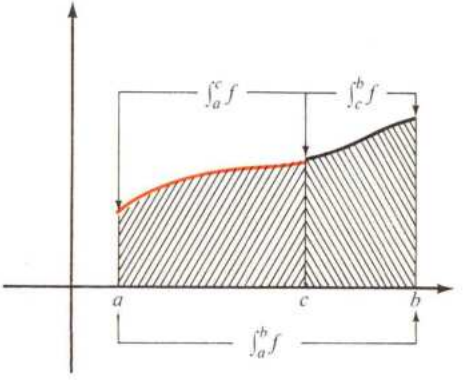
La función $|f|: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $|f|(x) = |f(x)|$ es continua y verifica $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$

Es decir, *el valor absoluto de la integral es menor o igual que la integral del valor absoluto.*

5.4. Sea $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y $c \in [a, b]$; entonces se tiene la siguiente propiedad aditiva respecto del intervalo:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Si $f(x) \geqslant 0, \forall\ x \in [a, b]$, esta propiedad tiene un significado intuitivo evidente. Afirma que el área del recinto determinado por la gráfica de f y el eje OX entre las ordenadas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$ es la suma del área que determina la gráfica de f con el eje OX entre las ordenadas $x = a$ y $x = c$ y el área que determina la gráfica de f con el eje OX entre $x = c$ y $x = b$ (Fig. 16.)



(Fig. 16)

Antes de proceder a la demostración de este teorema veamos que: si $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ y M es el máximo valor que toma f en $[a_1, b_1]$, $f(x) \leqslant M, \forall\ x \in [a_1, b_1]$ y si $c \in \mathbb{R}_+$, se verifica:

$$cf(x) \leqslant cM, \forall\ x \in [a_1, b_1]$$

Luego el máximo valor de cf en $[a_1, b_1]$ es cM.

Si $c \in \mathbb{R}^-$, se tiene:

$$cf(x) \geqslant cM, \forall\ x \in [a_1, b_1]$$

Es decir, si M es el máximo de $f(x)$ en $[a_1, b_1]$ y $c < 0$, cM entonces es el mínimo de cf en $[a_1, b_1]$.

Probemos la propiedad enunciada al principio de este apartado para el caso en que $c \geqslant 0$.

Sea $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$

Sean M_1 el máximo valor de f en $[x_0, x_1]$, M_2 el máximo valor de f en $[x_1, x_2]$, etc; en general: M_i el máximo valor de f en $[x_{i-1}, x_i]$

Como consecuencia de lo anterior, el máximo valor que alcanzará cf en cada $[x_{i-1}, x_i]$ será cM_i

Consideremos las siguientes funciones escalonadas:

$$E(x) = \begin{cases} M_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ M_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

$$(cE)(x) = \begin{cases} cM_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ cM_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ cM_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

Por la definición de integral, se tiene:

$$\int_a^b f = \lim_{m\to\infty} \int_a^b E_m ; \int_a^b cf = \lim_{m\to\infty} \int_a^b cE_m$$

De donde:

$$\int_a^b cf = \lim_{m\to\infty} \int_a^b cE_m = \lim_{m\to\infty} c \int_a^b E_m = c \lim_{m\to\infty} \int_a^b E_m = c \int_a^b f$$

Análogamente se puede demostrar si $c < 0$.

Ejercicios y cuestiones

17. Dadas las funciones escalonadas $E, E' : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$E(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 2 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad E'(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1/2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

calcula: a) $\int_0^2 (E + E')$, b) $\int_0^2 (2E - 1/3\, E')$

18. Dada la función escalonada $E : [0, 3\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \text{si} \quad \sqrt{2} < x \leqslant 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \text{si} \quad 2\sqrt{2} < x \leqslant 3\sqrt{2}, \end{cases}$$

calcula: a) $\int_0^{3\sqrt{2}} E$, b) $\int_{\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} E$, c) $\int_0^{\sqrt{2}} E$

19. Dadas las funciones escalonadas $E, E' : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$E(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ 2 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 1 \\ -3 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad E'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ 2 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 0 \\ -2 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Comprueba las siguientes relaciones:

a) $\left| \int_{-2}^2 E \right| \leqslant \int_{-2}^2 |E|$, b) $\left| \int_{-2}^2 E' \right| \leqslant \int_{-2}^2 |E'|$, c) $\left| \int_{-2}^2 (E + E') \right| \leqslant \int_{-2}^2 E| + \int_{-2}^2 |E'|$

20. Demuestra que si $E, E' : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones escalonadas y $c, d \in \mathbb{R}$

a) $|cE| = |c||E|$; $|dE'| = |d||E'|$

b) $\left| \int_a^b cE \right| \leqslant |c| \int_a^b |E|$

c) $\left| \int_a^b (cE + dE') \right| \leqslant |c| \int_a^b |E| + |d| \int_a^b |E'|$

21. Comprueba los resultados del problema anterior en el caso de que $c = -2$, $d = 1$ y $E, E' : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$E(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ -1 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad E'(x) = \begin{cases} -1/2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 1 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

22. Calcula el área del recinto limitado por la función escalonada

$$E(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad -3 \leqslant x \leqslant -2 \\ -1 & \text{si} \quad -2 < x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 3/2 \\ 3/2 & \text{si} \quad 3/2 < x < 2 \end{cases}$$

entre las ordenadas correspondientes a $x = -3$, $x = 2$ y el eje OX.

Tema 21

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL

El objetivo de este tema es conectar el concepto de primitiva con el de integral definida de una función; para conseguir esto, se define en primer lugar el concepto de función integral asociada a una función escalonada; análogamente se define y se interpreta el concepto de función integral asociada a una función continua; finalmente se llega a la Regla de Barrow, que establece la conexión indicada.

1 Función integral asociada a una función escalonada

1.1. Consideremos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Sea $E: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalonada definida por

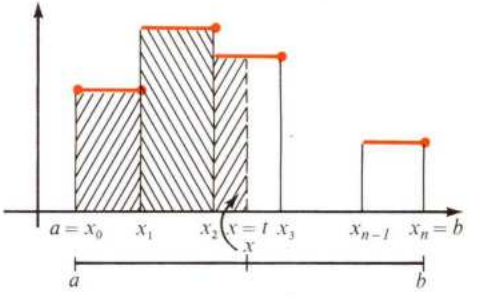
$$E(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n \end{cases}$$

A esta función le vamos a asociar una nueva función definida en $[a, b]$ mediante una integral de la siguiente forma:

$$x \longrightarrow F_E(x) = \int_a^x E$$

Esta función se dice la función integral asociada a E.

Intuitivamente, si E toma siempre valores positivos en $[a, b]$, la función F_E asocia a cada $x \in [a, b]$ el valor del área encerrada por la gráfica de E y el eje OX entre las ordenadas correspondientes a las abscisas a y x (Fig. 1).



(Fig. 1)

Ejemplos:

- Si la función E viene dada por

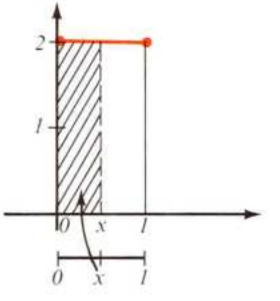
$$E: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow E(x) = 2,$$

entonces su función integral asociada viene definida por

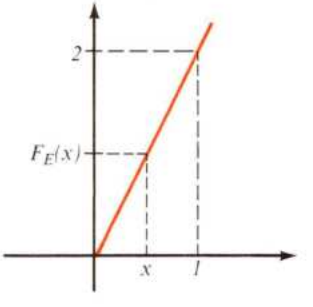
$$x \xrightarrow{F_E} \int_0^x 2 = 2(x-0) = 2x$$

Es decir: $F_E(x) = 2x$

$F_E(x)$ nos da el valor del área del rectángulo de altura 2 y base x, que es precisamente el recinto limitado por la gráfica de E, el eje OX y las ordenadas correspondientes a O y X (Ver fig. 2). La gráfica de $F_E(x)$ aparece en la figura 3.



(Fig. 2)



(Fig. 3)

• La función $E: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1/2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

tiene por función integral asociada

$$F_E: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow F_E(x) = \int_0^x E$$

Calculamos su valor:

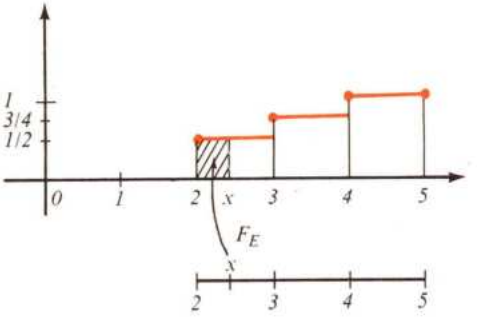
Si $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow F_E(x) = \int_0^x E = 1(x-0) = x$

Si $1 < x \leqslant 2 \Rightarrow F_E(x) = \int_0^x E = \int_0^1 E + \int_1^x E = 1(1-0) + \frac{1}{2}(x-1) =$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Por tanto, la función integral viene definida por

$$F_E(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1/2\, x + 1/2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$



(Fig. 4)

• Consideremos la función $E: [2, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida del modo siguiente:

$$E(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 3/4 & \text{si} \quad 3 < x \leqslant 4 \\ 1 & \text{si} \quad 4 < x \leqslant 5 \end{cases}$$

Calculemos su función integral asociada (Ver figuras 4, 5 y 6):

Si $2 \leqslant x \leqslant 3 \Rightarrow F_E(x) = \int_2^x E = \frac{1}{2}(x-2) = \frac{1}{2}x - 1$

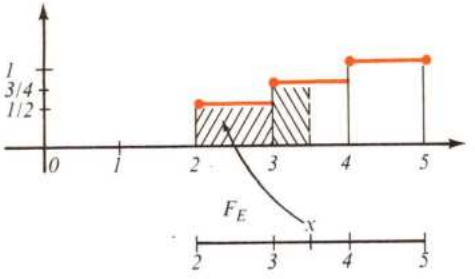
Si $3 < x \leqslant 4 \Rightarrow F_E(x) = \int_2^x E = \frac{1}{2}(3-2) + \frac{3}{4}(x-3) = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$

Si $4 < x \leqslant 5 \Rightarrow F_E(x) = \int_2^x E = \frac{1}{2}(3-2) + \frac{3}{4}(4-3) + 1(x-4) =$

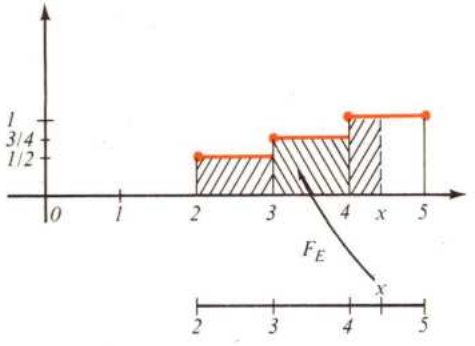
$$= x - \frac{11}{4}$$

Por tanto, la función integral asociada $F_E: [2, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$, a E, está definida por

$$F_E(x) = \begin{cases} 1/2\, x - 1 & \text{si} \quad 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 3/4\, x - 7/4 & \text{si} \quad 3 < x < 4 \\ x - 11/4 & \text{si} \quad 4 < x \leqslant 5 \end{cases}$$



(Fig. 5)



(Fig. 6)

Estudiamos a continuación la derivabilidad de la función integral asociada a una función escalonada.

1.2. *Derivada de la función integral asociada a una función escalonada.*

Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y $E: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalonada definida como en el apartado anterior. Su integral asociada $F_E: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en el conjunto $[a, b] - \{x_1, x_2, \ldots x_{n-1}\}$.

Además se verifica $\forall x \in [a, b]$, $x \notin \{x_1, x_2, \ldots x_{x-1}\}$ que:

$$F'_E(x) = E(x)$$

Ejemplo:

- Hemos visto en el segundo ejemplo de **1.1.** que la función $E: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1/2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

tiene por función integral asociada

$$F_E(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 7)}$$

Vamos a estudiar la derivabilidad de F_E.

Si $x \in]0, 1[$, con un h lo suficientemente pequeño para que $x + h \in]0, 1[$, se tiene:

$$F'_E(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F_E(x+h) - F_E(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = 1 = E(x)$$

Análogamente, si $x \in]1, 2]$, se tiene:

$$F'_E(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F_E(x+h) - F_E(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{1}{2}(x+h) + \frac{1}{2}\right] - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)}{h} = \frac{1}{2} = E(x)$$

Veamos qué pasa en $x = 1$: $F'_E(1) = \lim_{h \to 0} \frac{F_E(1+h) - F_E(1)}{h}$

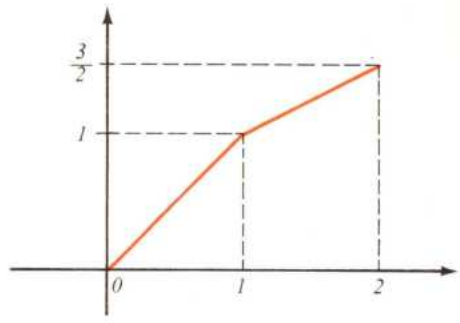
$F_E(1 + h)$ toma distinto valor según h sea mayor o menor que 0. Si $h > 0$, $1 + h \in]1, 2]$. Si $h < 0$, $1 + h \in]0, 1[$

Calculemos el límite según h se acerque a 0 por la derecha o por la izquierda:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F_E(1+h) - F_E(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}(1+h) + \frac{1}{2} - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}h}{h} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F_E(1+h) - F_E(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h) - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Los dos límites no son iguales, por tanto la función F_E no es derivable en $x = 1$. Se ve en la figura 7, que representa a F_E, que en el punto $x = 1$ la curva posee dos tangentes. Este resultado responde al enunciado del teorema.



(Fig. 7)

Ejercicios:

1. Calcula la función integral asociada a la función escalonada $E: [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 3/2 \\ 1 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

2. Calcula la función integral asociada a $E: [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$E(x) = \begin{cases} -3 & \text{si} \quad -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ -2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

3. Dada la función $E: [1/2, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad 1/2 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3/2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 3/2 \\ 3 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 3, \end{cases}$$

calcula su función integral asociada.

4. Dibuja las gráficas de las funciones escalonadas definidas en los problemas anteriores, así como las de las funciones integrales asociadas.

5. Dada la función escalonada

$$E: [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$E(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 3, \end{cases}$$

calcula su función integral asociada.

¿Es derivable en los puntos $x = 1$ y $x = 2$?

Nota: En $x = 0$, si $h < 0$, $x + h \notin [0, 1]$ y $F_E(x + h)$ no está definida; por esta razón se dice que F_E es derivable por la derecha en $x = 0$. Análogamente, en $x = 2$, $x + h \notin]0, 2]$ si $h > 0$ y $F_E(x + h)$ no está definida. Se dice que F_E es derivable por la izquierda en $x = 2$.

1.3. Aunque ya se ha ilustrado con un ejemplo, demostremos ahora el teorema del apartado **1.2.**

Sea $x \in [a, b]$, $x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$. Por ser P una partición de $[a, b]$, x estará en algún intervalo $[x_0, x_1[$, $]x_1, x_2[\ldots ..]x_{n-1}, x_n[$. Supongamos $x \in]x_{i-1}, x_i[$, donde i es cualquiera de los números, $i = 1, 2, \ldots n$.

Para un h lo suficientemente pequeño, $x + h \in]x_{i-1}, x_i[$ y se verifica $E(x + h) = e_i$; entonces:

$$F'_E(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F_E(x+h) - F_E(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} E - \int_a^x E}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1) + \ldots + e_i(x + h - x_{i-1})] - [e_1(x_1 - x_0) + e_2(x_2 - x_1') + \ldots + e_i(x - x_{i-1})]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e_i(x + h - x_{i-1}) - e_i(x - x_{i-1})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e_i h}{h} = e_i = E(x)$$

Si $x = a$ o $x = b$, se obtiene de la misma forma que $F'_E(a) = E(a)$, $F'_E(b) = E(b)$. Estas $F'_E(a)$, $F'_E(b)$ son en realidad las derivadas por la derecha y por la izquierda en $x = a$ y $x = b$, respectivamente.

2 Función integral asociada a una función continua

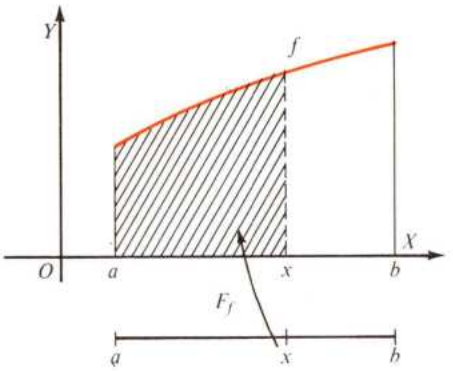
2.1. Sea $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. La función $[a, b] \xrightarrow{F_f} \mathbb{R}$ definida por $F_f(x) = \int_a^x f(x)dx$ se dice la función integral asociada a f.

De la misma forma que en el caso anterior, si f es positiva en $[a, b]$, F_f asocia a cada $x \in [a, b]$ el valor del área encerrada por la gráfica de f, el eje OX y las ordenadas correspondientes a las abscisas a y x (Fig. 8).

Se enuncia a continuación, aunque no se demuestra, un resultado análogo para funciones continuas al obtenido para la función integral asociada a una función escalonada.

2.2. La función integral F_f asociada a una función continua $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en $[a, b]$ es derivable en el mismo intervalo, y se verifica:

$$F'_f(x) = f(x), \forall\ x \in [a, b]$$



(Fig. 8)

Este resultado nos dice que F_f es una primitiva de f, pero no una primitiva cualquiera, sino aquella que se anula para $x = a$, ya que $F_f(a) = \int_a^a f = 0$

Nota: De ahora en adelante, cuando haya peligro de confusión, denotaremos por t la variable independiente de la función integrando y por x la variable de la función integral asociada si aparecen las dos variables juntas en una misma expresión.

Ejemplos:

- Sea $F: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t$. Su función integral asociada es:

$$[0, 1] \xrightarrow{F_f} \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow F_f(x) = \int_0^x t\,dt$$

Su derivada en $x \in [0, 1]$ viene dada por

$$F'_f(x) = f(x) = x$$

- Sea $f: [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t^2 + 1$. Su función integral asociada es:

$$[-1, 2] \xrightarrow{F_f} \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow F_f(x) = \int_{-1}^x (t^2 + 1)\,dt$$

Su derivada en $x \in [-1, 2]$ viene dada por

$$F'_f(x) = f(x) = x^2 + 1$$

- La función derivada de $F: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen} t\,dt$ viene dada por

$$F'(x) = \operatorname{sen} x$$

2.3. *Si F es una primitiva de $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, se tiene que:* $F_f(x) = F(x) - F(a)$.

En efecto: como F_f y F son primitivas de f, se tiene:

$$F_f(x) = F(x) + C \qquad [1]$$

En consecuencia, $F_f(a) = F(a) + C$; por otra parte

$$F_f(a) = \int_a^a f = 0,$$

luego: $0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$; sustituyendo en [1] el valor de C, resulta:

$$F_f(x) = F(x) - F(a)$$

6. Escribe la función integral asociada F_f de la función $f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 6t$.

7. Escribe la función integral asociada F_f de la función $f: [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \cos t$. ¿Cuánto vale $F'_f\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

8. Calcula $F'_f(0)$ siendo $f: [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = e^t$

9. Calcula la derivada de la función

$$f(x) = \int_0^x (t^2 - 1)\,dt$$

10. Deriva la función

$$F(x) = \int_{-\pi}^x (2\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t)\,dt$$

¿Cuánto vale $F'(0)$?

11. Calcula $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ siendo $F: \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $F(x) = \int_0^x \pi \operatorname{tg}^2 t$

12. Escribe la función integral asociada de la función $f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \frac{1}{1 + t^2}.$$ Calcula $F'_f(0), F'_f(1)$

13. Deriva la función

$$F(x) = \int_0^x (2t + 1)\,dt + \int_0^x e^{-t}\,dt$$

14. Deriva la función

$$F(x) = \left[\int_{-1}^x (t + 1)\,dt\right] + \left[\int_{-1}^x (t - 1)\,dt\right]$$

15. Deriva la función

$$F(x) = \left[\int_0^x (t^2 + t + 1)\,dt\right]^2$$

Ejemplos:

- Sabiendo que $F(x) = x^3 + 2x^2$ es una primitiva de la función $f\colon [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, calculemos su función integral asociada.

  Sabemos: $F_f(x) = F(x) - F(-1)$

  $$F(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 = 1$$

  Entonces $F_f\colon [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida $F_f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$

- Consideremos la función $f\colon [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

  $$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$$

  Una primitiva de f viene dada por $F(x) = -\cos x + \operatorname{sen} x$

  $$F(0) = -1$$

  La función integral F_f asociada a $f\colon [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $F_f(x) = -\cos x + \operatorname{sen} x + 1$

16. Calcula la función integral asociada a $f\colon \left[-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $F(x) = 3x - 2$ es una primitiva de f.

17. Calcula la función integral asociada a $f\colon [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x + 1)^2$.

18. Calcula la función integral asociada a $f\colon [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos x$

19. Si la función f está definida en el intervalo $[e, e + 1]$ y $\int f(x)dx = Lx + C$, ¿cómo está definida F_f?

3 Regla de Barrow

En el tema anterior hemos definido el concepto de integral de una función continua mediante una aproximación por integrales de funciones escalonadas. La definición no nos proporciona un procedimiento manejable para calcular el valor de esta integral.

En lo que sigue trataremos de encontrar una regla que nos permita calcular este valor de una forma cómoda.

Si $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y F una primitiva en f, entonces se verifica:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

En efecto: consideremos la función integral asociada a f

$$[a, b] \xrightarrow{F_f} \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow F_f(x) = \int_a^x f$$

Como F es una primitiva de f, por lo dicho en **2.3.** se tiene que $F_f(x) = F(x) - F(a) \Rightarrow F_f(b) = F(b) - F(a)$

Como $F_f(b) = \int_a^b f$, resulta que:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Esta expresión se conoce con el nombre de Regla de Barrow.

Ejemplos:

- Dada la función $f\colon [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^2$, una primitiva de esta función es $F(x) = x^3$. Por tanto:

$$\int_0^2 3x^2\,dx = 2^3 - 0^3 = 8$$

- En $\int_0^1 e^x dx$, $F(x) = e^x$ es una primitiva del integrando, luego:

$$\int_0^1 e^x\,dx = e^1 - e^0 = e - 1$$

- Calculemos $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$.

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = Le - L1 = 1 - 0 = 1$$

- Si $F(x) = x^2 - x + 1$ es una primitiva de una función $f(x)$, entonces el valor de $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ es: $\int_{-2}^{2} f(x)dx =$
$= F(2) - F(-2) = (2^2 - 2 + 1) - (-2)^2 - (-2) + 1 = -4$

- Calculemos la función integral asociada a $f\colon [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$ empleando la Regla de Barrow.

Se tiene:
$F_f(x) = \int_{-\pi}^{x} \operatorname{sen}\ x\ dx = [-\cos\ x] - [-\cos\ (-\pi)] = -\cos\ x - 1$

- Consideremos la función $f\colon [-2, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Claramente la función f está definida de forma distinta en los intervalos $[-2, 0]$ $]0, 1[$. Aplicando la propiedad aditiva respecto del intervalo de la integral indefinida, resulta:

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = \int_{-2}^{0} (-x)dx + \int_0^1 x^2 dx$$

Como $\int_{-2}^{0} (-x)dx = 2$ y $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, resulta que

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Nota: Por comodidad se escribe con frecuencia $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$
Con esta notación la Regla de Barrow se escribe:
$\int_a^b f = [F(x)]_a^b$ o también: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$

20. Calcula $\int_0^1 f(x)dx$ sabiendo que una primitiva de f es $F(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$.

21. Si $F(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ es una primitiva de f, calcula $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)dx$.

22. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-1}^{1} (x + 2x^2 - x^3 + 5x^4)\,dx$;

b) $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$; c) $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$;

d) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx$; e) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$;

f) $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; g) $\int_2^5 \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx$.

23. Calcula por la Regla de Barrow F_f siendo $f\colon \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(t) = t - 1$.

24. Dada la función $f\colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} 2t$, ¿qué valor toma $F_f\left(\frac{\pi}{2}\right)$?

25. Calcula: $\int_{-2}^{2} |x|\,dx$; $\int_{-1}^{1} e^{2|x|}\,dx$.

26. Dada la función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ -x + 2 & \text{si} \quad x > 1, \end{cases}$$

calcula $\int_0^2 f(x)dx$.

Ejercicios y cuestiones

27. Calcula y dibuja la gráfica de la función integral asociada a $E: [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant \dfrac{3}{2} \\ -1 & \text{si} \quad \dfrac{3}{2} < x \leqslant 3 \end{cases}$$

¿Es derivable F_E en los puntos $\left\{1, \dfrac{3}{2}\right\}$? ¿Y en el resto del intervalo? Calcula la derivada en los puntos en que exista.

28. Calcula F_f donde $f: [1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f(t) = -\operatorname{sen} 2t$.

29. Calcula $F'_f(3)$, siendo $f: [2, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \dfrac{1}{t^2 - 2}$

30. Deriva la función $F(x) = \int_2^x \sqrt{4 + t^2}\, dt$. Calcula $F'(2)$.

31. Calcula $F'(L3)$ sabiendo que $F(x)$ viene definida por

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{3} e^t\, dt$$

32. Calcula las siguientes integrales definidas:

a) $\int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1}\, dx$; b) $\int_0^2 (2-x)^3\, dx$; c) $\int_1^3 e^{x-1}\, dx$;

d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$; e) $\int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\, dx$; f) $\int_0^1 \dfrac{3\, dx}{x^2 + 1}$; g) $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$;

h) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \cos x$; i) $\int_0^1 \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$; j) $\int_{-2}^1 \dfrac{x - 1}{x(x - 2)}$; k) $\int_{-2}^2 \dfrac{1}{x^2 + 4}$

33. Calcula $\int_{-1}^1 f(x)dx$, siendo $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ -x + 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

34. Calcula $\int_{-1}^2 f(x)dx$ donde $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 4x - 2x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

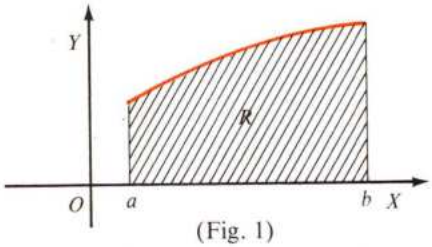
Tema 22 APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

En este tema se utiliza la noción de integral definida para dar un sentido preciso a nuestra intuición geométrica en materia de áreas, volúmenes, etc.

Se abordan los problemas de cálculo de áreas y de volúmenes de cuerpos de revolución para finalizar con una aplicación física del concepto de integral definida (el trabajo producido por una fuerza).

1 Areas de recintos planos

1.1. Sea $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y supongamos que $f(x) \geqslant 0, \forall\ x \in [a, b]$. Llamemos R al recinto plano limitado por la gráfica de f y el eje OX entre las rectas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$ (Fig. 1).



(Fig. 1)

El área de este recinto la denotaremos por $\mathscr{A}(R)$ y viene definida por la integral $\int_a^b f(x)dx$, es decir:

$$\mathscr{A}(\mathbf{R}) = \int_a^b \mathbf{f(x)}\,\mathbf{dx}$$

Ejemplos:

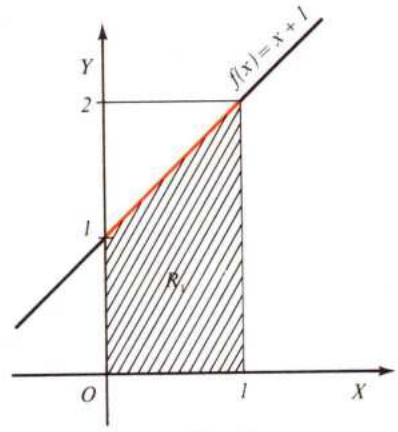
- Calculemos el área del recinto R_1 limitado por la gráfica de la función $f(x) = x + 1$ y el eje OX entre las ordenadas correspondientes a $x = 0$ y $x = 1$ (Fig. 2).

  Se observa que $f(x) \geqslant 0, \forall\ x \in [0, 1]$. Por tanto:

  $$\mathscr{A}(R_1) = \int_0^1 (x + 1)dx$$

  Como $F(x) = \frac{1}{2}\ x^2 + x$ es una primitiva de $f(x) = x + 1$, se tiene:

  $$\mathscr{A}(R_1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$



(Fig. 2)

Ejercicios:

1. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$ y el eje OX entre las ordenadas de ecuaciones $x = 1$ y $x = 4$.

(*Indicación:* En este ejercicio y en los siguientes conviene hacer la gráfica de la función.)

2. Dada la función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$, calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje OX entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

3. Calcula el área del recinto determinado por la parábola $y = x - x^2$ y el eje OX.

- El área del recinto R_2 limitado por la función $f(x) = e^x$ y el eje OX entre $x = 0$, $x = L2$ viene dada (Fig. 3) por:

$$\mathcal{A}(R_2) = \int_0^{L2} e^x\,dx = [e^x]_0^{L2} = e^{L2} - e^0 = 2 - 1 = 1$$

- Consideremos el recinto R_3 que determina la parábola $y = x^2$ la recta $y = -x + 2$ y el eje OX.

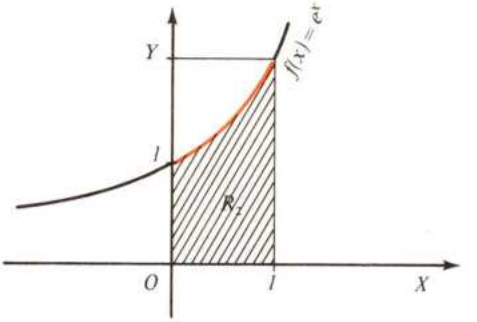
Resolviendo el sistema $\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$ se obtienen dos puntos de intersección de ambas gráficas.

En la figura 4 se ha señalado el punto (1, 1). Para calcular el área del recinto R_3 de la figura consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ -x + 2 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ que es continua.

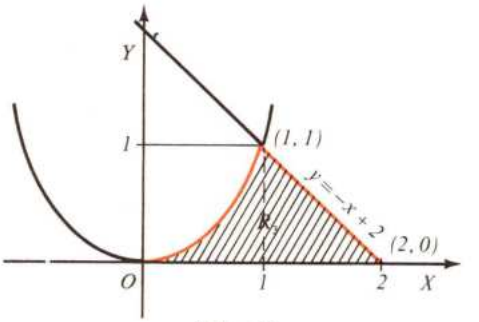
El área del recinto R_3 es:

$$\mathcal{A}(R_3) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx =$$

$$= \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (-x + 2)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 = \frac{5}{6}$$



(Fig. 3)



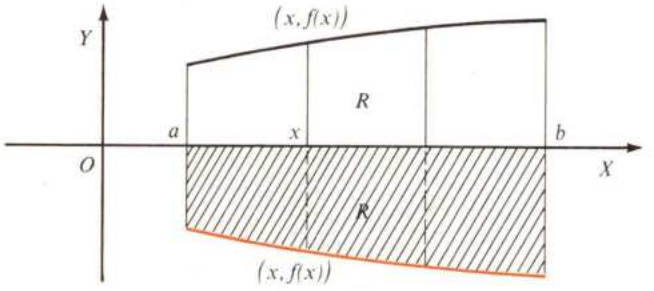
(Fig. 4)

1.2. Supongamos ahora una función $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$, tal que $f(x) \leqslant 0$, $\forall\ x \in [a, b]$. Su representación gráfica será una curva situada bajo el eje OX.

Llamemos R al recinto limitado por el eje OX, la gráfica de f y las ordenadas $x = a$ y $x = b$.

Si calculamos $\int_a^b f(x)dx$, obtendremos un número negativo, el cual no representa el valor $\mathcal{A}(R)$, dado que no tiene sentido para nosotros hablar de áreas negativas de acuerdo con nuestra intuición geométrica.

Consideremos la función $(-f)$: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(-f)(x) = -f(x)$. La gráfica de $-f$ es simétrica de la gráfica de f respecto del eje OX (Fig. 5); por otra parte, observamos que las áreas $\mathcal{A}(R)$ y $\mathcal{A}(R')$ son iguales.



(Fig. 5)

Dado que $(-f)(x) \geqslant 0$, $\forall\ x \in [a, b]$, se tiene:

$$\mathcal{A}(R) = \int_a^b (-f)(x)\,dx = -\int_a^b f(x)dx$$

4. Calcula el área del recinto determinado por la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - x - 2$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

5. Calcula el área del recinto que determina la gráfica de la función f anterior con el eje OX.

6. Calcula el área del recinto plano determinado por la gráfica de la función $f(x) = \cos x$ y el eje OX entre las rectas de ecuaciones $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$

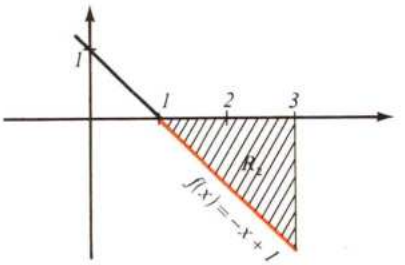
Ejemplos:

- Consideremos el recinto R_1 determinado por la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = -1$, $x = 2$ (Fig. 6). Se tiene que $f(x) \leqslant 0$ $\forall\ x \in [-1, 2]$, luego:

$$\mathscr{A}(R_1) = -\int_{-1}^{2}(-x^2)dx = \int_{-1}^{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 3$$

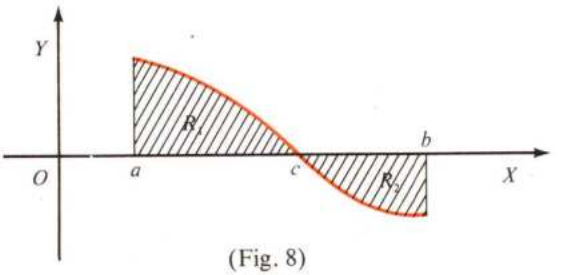
- Si $f(x) = -x + 1$ y R_2 es el triángulo determinado por la gráfica de f, el eje OX y la recta $x = 3$ (Fig. 7), su área es:

$$\mathscr{A}(R_2) = -\int_{1}^{3}(-x + 1)dx = \int_{1}^{3}(x - 1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{1}^{3} = 2$$



(Fig. 7)

1.3. Supongamos que la función $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ se anula y cambia de signo en $c \in]a, b[$. El recinto R queda dividido por el eje OX en dos partes, R_1 y R_2 (Fig. 8), una situada encima y la otra debajo del eje OX.



(Fig. 8)

Suponiendo R_1 la parte positiva del recinto, se tiene:

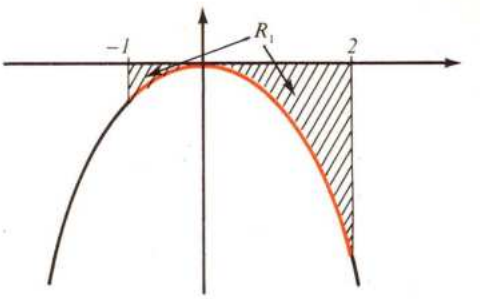
$$\mathscr{A}(R_1) = \int_a^c f(x)dx$$

$$\mathscr{A}(R_2) = -\int_c^b f(x)dx$$

Como $\mathscr{A}(R) = \mathscr{A}(R_1) + \mathscr{A}(R_2)$, se sigue que:

$$\mathscr{A}(R) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

Esto se generaliza, de forma evidente, al caso en que f corte al eje OX y cambie más de una vez de signo en $[a, b]$.



(Fig. 6)

Ejemplos:

- Consideremos el recinto plano R que determina la sinusoide de ecuación $f(x) = \operatorname{sen} x$ con el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2\pi$. En la figura 9 se observa que:

$$\mathscr{A}(R) = \mathscr{A}(R_1) + \mathscr{A}(R_2) =$$

$$= \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 4$$

- Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$, consideremos el recinto R determinado por la gráfica f, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 0$, $x = 3$ (Fig. 10).

Se observa que:

$$\forall\ x \in [0, 1],\ f(x) \geqslant 0$$

$$\forall\ x \in [1, 2],\ f(x) \leqslant 0$$

$$\forall\ x \in [2, 3],\ f(x) \geqslant 0$$

Como $\mathscr{A}(R) = \mathscr{A}(R_1) + \mathscr{A}(R_2) + \mathscr{A}(R_3)$, se tiene:

$$\mathscr{A}(R) = \int_0^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$

Una primitiva de f es la función $F(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3}{4}x^2 + x$, luego:

$$\mathscr{A}(R) = |F(1) - F(0)| - |F(2) - F(1)| + |F(3) - F(2)| =$$

$$= 2F(1) + F(3) - F(0) - 2F(2) = \frac{5}{6} + \frac{3}{4} - 0 - \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$$

1.4. Calculemos a continuación áreas de recintos planos más generales.

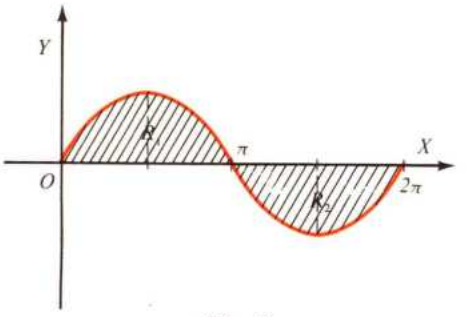
Consideraremos recintos que no estén limitados por el eje OX sino que lo estén en su parte superior e inferior por funciones continuas.

Sean f, g: $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall\ x \in [a, b]$. Designemos por R_1 al recinto limitado por la gráfica de g, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$. Análogamente, designemos por R_2 al recinto limitado por la gráfica de g, el eje OX y las mismas rectas anteriores.

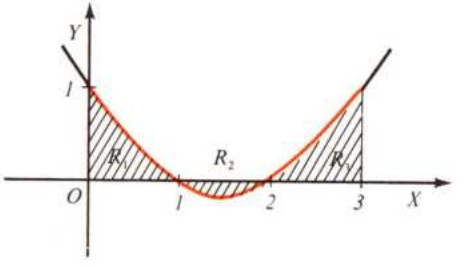
Suponiendo que $g(x), f(x) \geqslant 0$, $\forall\ x \in [a, b]$, el área del recinto R de la figura 11 será:

$$\mathscr{A}(R) = \mathscr{A}(R_1) - \mathscr{A}(\widehat{R_2}) =$$

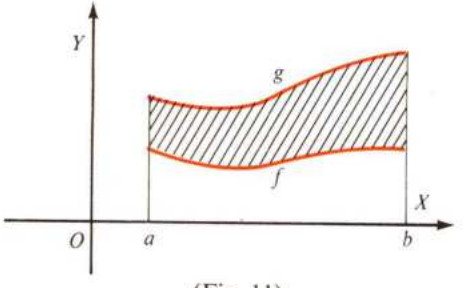
$$= \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$



(Fig. 9)



(Fig. 10)



(Fig. 11)

7. Calcula el área que encierra la gráfica de la función $f(x) = \cos x$ con el eje OX entre $x = 0$, $x = 2\pi$.

8. Dada la función f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ 2x - 5 & \text{si} \quad x > 2, \end{cases}$$

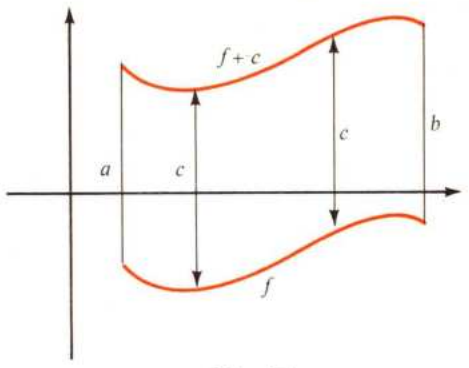
calcula el área que encierra la gráfica de f con el eje OX entre las rectas $x = 0$, $x = 3$.

9. Calcula el área que encierra la gráfica de la función f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$ con el eje OX entre las rectas $x = -1$, $x = 2$.

1.5. Supongamos el caso más general, donde f y g con $f(x) \leqslant g(x), \forall\ x \in [a, b]$, no estén restringidas a la condición $f(x), g(x) \geqslant 0, \forall\ x \in [a, b]$

Consideremos las funciones $f + c, g + c: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $(f + c)(x) = f(x) + c$, $(g + c)(x) = g(x) + c$, donde $c \geqslant 0$.

La curva que representa a $f + c$ es igual que la que corresponde a f, con la diferencia de que la gráfica de $f + c$ se ha alejado de la gráfica de f, paralelamente al eje OY, una distancia c y en sentido positivo (Fig. 12). Lo mismo ocurre con $g + c$ respecto a g.



(Fig. 12)

Las áreas de los recintos R y R' de la figura 13 deben ser iguales; la única diferencia entre los recintos es que están situados en lugares distintos.

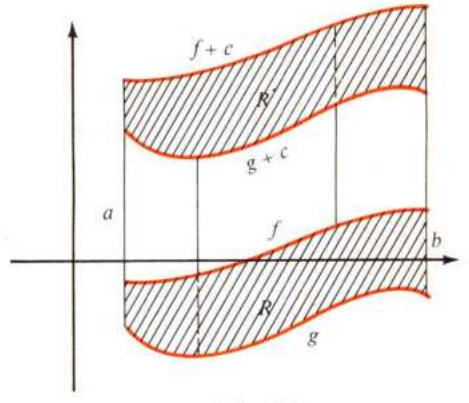
Luego: $\mathscr{A}(R) = \mathscr{A}(R')$

Si $f, g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant g(x), \forall\ x \in [a, b]$, se verifica también $(f + c)(x) \leqslant (g + c)(x), \forall\ x \in [a, b]$. Por otra parte, siempre podremos encontrar un $c \geqslant 0$ suficientemente grande tal que $(f + c)(x) \geqslant 0$, $(g + c)(x) \geqslant 0$. En estas condiciones, R' es un recinto del tipo estudiado en **1.4.** Por tanto:

$$\mathscr{A}(R') = \int_a^b [(g(x) + c) - (f(x) + c)]dx =$$

$$= \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \mathscr{A}(R),$$

que es la misma fórmula que la obtenida en **1.4.**

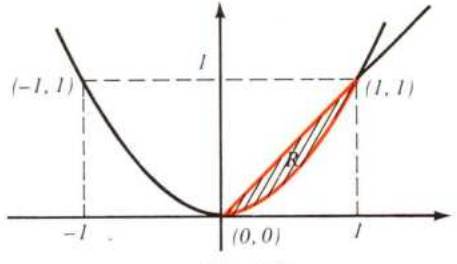


(Fig. 13)

Ejemplos:

- Consideremos las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, que verifican $f(x) \leqslant g(x), \forall\ x \in [0, 1]$. Las gráficas de las funciones f, g determinan por sí solas un recinto R en el plano (Fig. 14).

$$\mathscr{A}(R) = \int_0^1 [g(x) - f(x)]dx = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$



(Fig. 14)

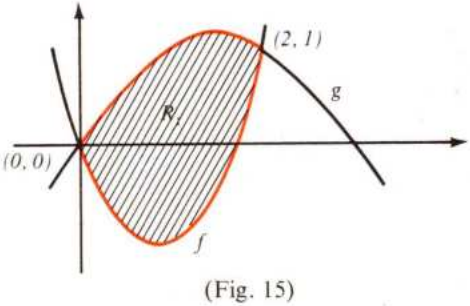
- Consideremos el recinto determinado por las parábolas $f(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}x^2$, $g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2$ (Fig. 15). Se observa que $f(x) \leqslant g(x), \forall\ x \in [0, 2]$ y que se cortan en los puntos $(0, 0), (2, 1)$.

  El área del recinto R_1 que limitan las funciones f y g es:

$$\mathscr{A}(R_1) = \int_0^2 [g(x) - f(x)]dx =$$

$$= \int_0^2 \left[\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right) - \left(-\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}x^2\right)\right]dx =$$

$$= \int_0^2 (4x - 2x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$



(Fig. 15)

• Calculemos el área del círculo de centro el origen de coordenadas y radio la unidad (Fig. 16). La curva que limita este recinto es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Esta corta a OX en los puntos de abscisas $x = -1$, $x = 1$. Despejando en la ecuación, se obtienen dos valores para y:

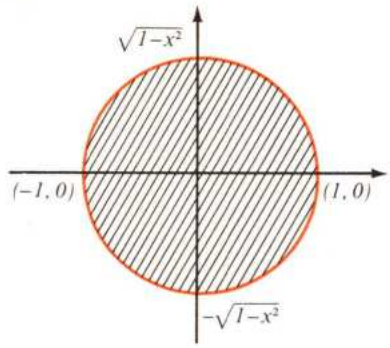
$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$y = -\sqrt{1 - x^2},$$

que son precisamente las funciones que tienen por gráfica las semicircunferencias que limitan el círculo. La primera está situada encima de OX; y la segunda, debajo. El círculo, pues, es el recinto que determinan las funciones

$$g: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$



(Fig. 16)

El área pedida es:

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} |g(x) - f(x)|dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}dx = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$$

Calculamos la integral indefinida $\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$.

Haciendo el cambio de variable: $x = \text{sen } t \Rightarrow dx = \cos t dt$.

$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int \sqrt{1 - \text{sen}^2 t} \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt$.

Como $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$, resulta:

$$\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\text{ sen } 2t\right)$$

Realizando el cambio inverso, tenemos $t = \text{arc sen } x$

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\text{arc sen } x + \frac{1}{2}\text{ sen (2 arc sen } x)\right) + C$$

sen (2 arc sen x) = 2 sen (arc sen x) cos (arc sen x) = $2x\sqrt{1-x^2}$.

La integral nos queda:

$$\int \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{1}{2}(\text{arc sen } x + x\sqrt{1 - x^2}) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\text{ arc sen } x + \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\text{ arc sen } x\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\text{, luego}$$

$$\mathcal{A} = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

• Hallemos ahora el área que encierra la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (Fig. 17)}$$

Como en el caso de la circunferencia, despejando y obtenemos dos funciones $f, g: [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$g(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, f(x) = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

cuyas gráficas corresponden a las semielipses situadas respectivamente sobre y bajo el eje OX.

El área del recinto R que determina la elipse es:

$$\mathcal{A}(R) = \int_{-a}^{a} [g(x) - f(x)]dx = \int_{-a}^{a} 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx =$$

$$= 2b\int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

Para calcular $\int \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx$ hagamos el cambio:

$$\frac{x}{a} = \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = a \cos t dt.$$

$$\int \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cdot a \cos t dt = a\int \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)$$

Haciendo, como antes, el cambio inverso $t = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a}$

$$\int \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = \frac{a}{2}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2 \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right)\right) + C$$

Pero $\operatorname{sen}\left(2\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right) =$

$= 2\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, por tanto:

$$\int \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = \frac{a}{2}\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) \Rightarrow$$

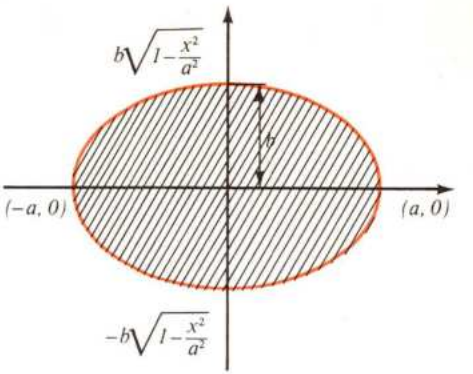
$$\Rightarrow \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = \frac{a}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right]_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{a}{2}\left[\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}\right]_{-a}^{a} = \frac{a\pi}{2}$$

El área pedida será:

$$\mathcal{A}(R) = 2b\frac{a\pi}{2} = \pi ab$$

Nota: Cuando $a = b$, la elipse se convierte en una circunferencia de radio a; por tanto, el área del círculo que determina será πa^2.



(Fig. 17)

10. Calcula el área del recinto que determina la parábola $y^2 = x$ con la recta $x = 2$.

11. Determina el área del recinto plano que forman las parábolas $y = x^2$, $x = y^2$.

12. Dadas las funciones $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 - 4x + 3$ $g(x) = 3$, calcula el área del recinto que determinan.

13. Calcula el área determinada por las gráficas de las funciones $g(x) = e^x$, $f(x) = e^{-x}$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = -1$, $x = 1$.

14. Halla el área comprendida entre las parábola $x = 2 - 2y^2$ y el eje OY.

15. Calcula el área del recinto que limitan las funciones $g(x) = 6x - x^2$, $f(x) = x^2 - 2x$.

2 Volúmenes de sólidos de revolución determinados por funciones escalonadas

2.1. Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y sea $E: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función escalonada definida por

$$E(x) = \begin{cases} e_1 & \text{si} \quad a = x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ e_2 & \text{si} \quad x_1 < x \leqslant x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n & \text{si} \quad x_{n-1} < x \leqslant x_n = b \end{cases}$$

Supongamos $E(x) \geqslant 0, \forall\ x \in [a, b]$. Sea R el recinto plano que determina E con OX entre las abscisas $x = a$, $x = b$.

Si este recinto plano lo hacemos girar alrededor del eje OX, nos determina lo que se denomina un sólido de revolución (Fig. 18). Determinaremos el volumen de este sólido. Para ello calculamos el volumen que engendra un rectángulo cualquiera de los que forman el recinto R. El rectángulo que tiene de base $(x_i - x_{i-1})$ y de altura e_i, al girar sobre su base, nos determina un cilindro cuyo círculo básico tiene radio e_i y de altura $(x_i - x_{i-1})$ (Fig. 19). El volumen V_i de este cilindro será:

$$V_i = \pi e_i^2 (x_i - x_{i-1})$$

Por tanto, el volumen del sólido de revolución, V, es:

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$$

$$V = \pi e_1^2 (x_1 - x_0) + \pi e_2^2 (x_2 - x_1) + \ldots + \pi e_n^2 (x_n - x_{n-1})$$

$$V = \pi \left(e_1^2 (x_1 - x_0) + e_2^2 (x_2 - x_1) + \ldots + e_n^2 (x_n - x_{n-1}) \right)$$

Ahora bien:

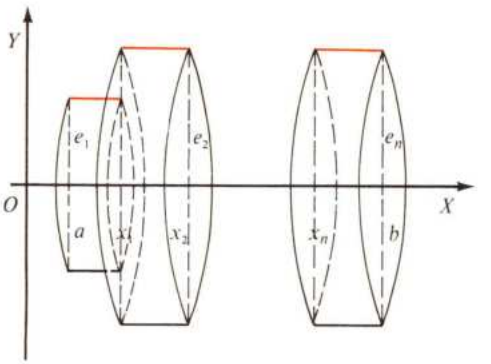
$$e_1^2 (x_1 - x_0) + e_2^2 (x_2 - x_1) + \ldots + e_n^2 (x_n - x_{n-1}) = \int_a^b E^2$$

Obtenemos:

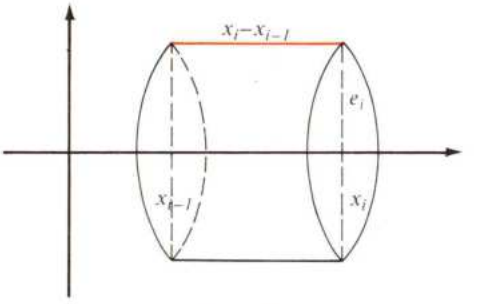
$$\mathbf{V = \pi \int_a^b E^2}$$

2.2. En el caso más general en que la anterior función escalonada no esté sometida a la condición $E(x) \geqslant 0, \forall\ x \in [a, b]$, el resultado es exactamente el mismo, dado que el volumen que engendra un recinto plano determinado por una función escalonada al girar alrededor de OX es independiente del signo de $E(x)$, es decir: el volumen que engendra el rectángulo de base $(x_i - x_{i-1})$ y altura $|e_i|$ es independiente del signo de e_i, como se observa en la figura 20.

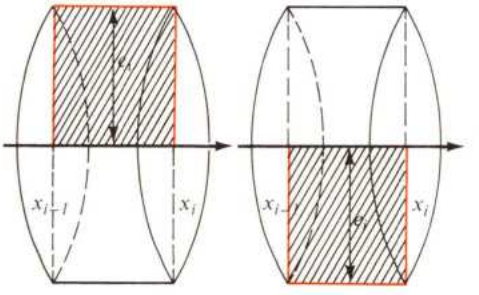
$$V_i = \pi e_i^2 (x_i - x_{i-1}) = \pi |e_i|^2 (x_i - x_{i-1})$$



(Fig. 18)



(Fig. 19)



(Fig. 20)

Ejemplos:

- Sea la función escalonada E: $[1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \\ -2 & \text{si} \quad \frac{3}{2} < x \leqslant 2 \\ 2 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

Vamos a obtener el volumen V del sólido de revolución que determina $E(x)$ al girar alrededor del eje OX (Fig. 21)

$$V = \pi \int_1^3 E^2$$

donde E^2: $[1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$E^2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2} \\ 4 & \text{si} \quad \frac{3}{2} < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

Entonces:

$$V = \pi \int_1^3 E^2 = \pi \left[1\left(\frac{3}{2} - 1\right) + 4\left(2 - \frac{3}{2}\right) + 4\,(3-2) \right] = \frac{13}{2}\,\pi$$

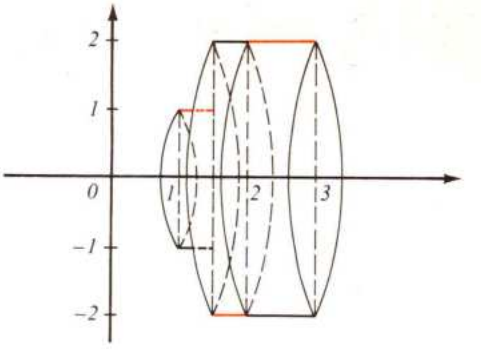
- Consideremos E: $[-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ -1 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant \frac{3}{2} \\ 3 & \text{si} \quad \frac{3}{2} < x \leqslant 2 \end{cases}$$

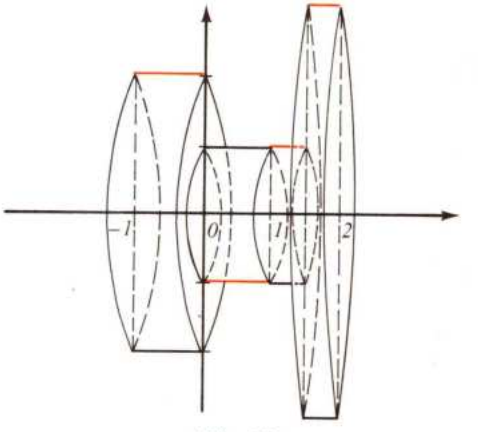
El volumen de revolución que determina $E(x)$ (Fig. 22) al girar alrededor del eje OX viene dado por

$$V = \pi \int_{-1}^{2} E^2 =$$

$$= \pi\,[4(0-(-1)) + 1\,(1-0) + 1(3/2-1) + 9(2-3/2)] = 10\,\pi$$



(Fig. 21)



(Fig. 22)

16. Calcula el volumen del sólido de revolución que determina la función

E: $[-3, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad -3 \leqslant x \leqslant -2 \\ 1 & \text{si} \quad -2 < x \leqslant -1 \\ 3/2 & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

al girar alrededor del eje OX.

17. Dada la función

$$E(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 3, \end{cases}$$

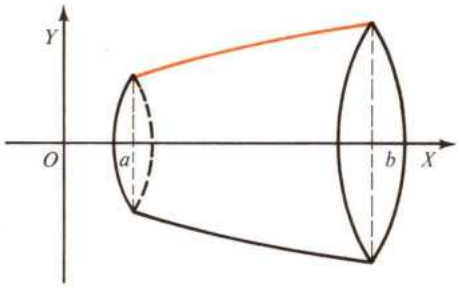
determina el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor de OX el recinto determinado por la gráfica de E y las ordenadas $x = 0$, $x = 3$.

3 Volúmenes de sólidos de revolución determinados por funciones continuas

3.1. Sea $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Sea R el recinto limitado por f y el eje OX entre las ordenadas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$.

Al girar R alrededor del eje OX determina un sólido de revolución (Fig. 23), cuyo volumen, V, vendrá definido como en el apartado **2** por

$$V = \pi \int_a^b f^2 = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



(Fig. 23)

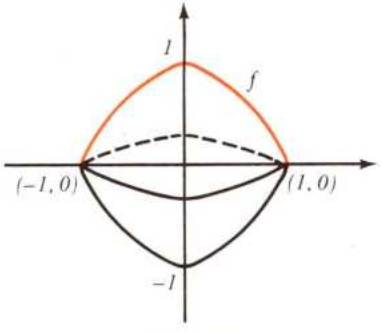
Ejemplos:

- Dada la función $f\colon [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$ vamos a calcular el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor del eje OX el recinto determinado por la gráfica de f y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ (Fig. 24).

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (1 + x^4 - 2x^2) dx =$$

$$= \pi \left[x + \frac{x^5}{5} - \frac{2}{3} x^3 \right]_{-1}^{1} = \frac{16}{15} \pi$$

$$V = \frac{16}{15} \pi$$



(Fig. 24)

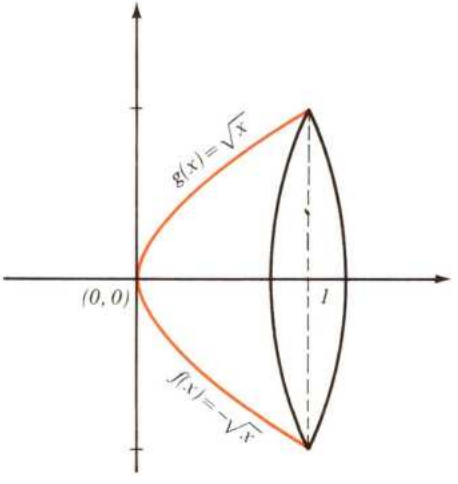
- Consideremos el recinto R, limitado por la parábola $y^2 = x$ y la recta $x = 1$. Despejando el valor de y en $y^2 = x$, obtenemos dos funciones $f, g\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = -\sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x}$

  Estas son las funciones que tienen como gráfica la parte inferior y superior a OX, respectivamente, de la parábola.

  Las gráficas de f y g determinan el mismo sólido de revolución al girar alrededor del eje OX (Fig. 25). Por tanto el volumen de éste viene dado por

$$V = \pi \int_0^1 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^1 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

  Generalizaremos ahora el resultado obtenido al principio de este apartado calculando el volumen que determinará al girar alrededor del eje OX un recinto limitado por dos funciones continuas entre las abscisas $x = a$, $x = b$.



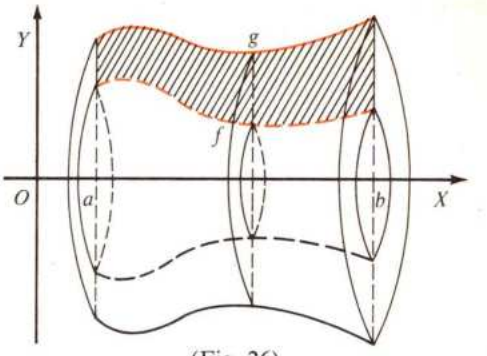
(Fig. 25)

3.2. Sean $f, g\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$, con la condición $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, $\forall\ x \in [a, b]$.

Si llamamos V_f y V_g a los volúmenes engendrados al girar alrededor del eje OX los recintos limitados por las gráficas de las funciones f y g respectivamente y las ordenadas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$, entonces el volumen del sólido determinado por las gráficas de f y g (Fig. 26) y las ordenadas anteriores es

$$V = V_g - V_f = \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx =$$

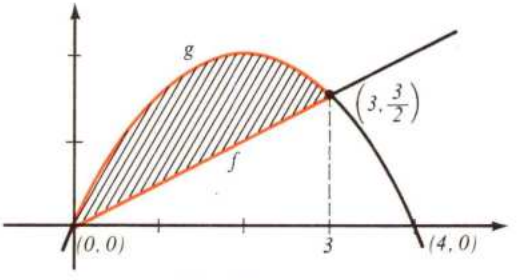
$$= \pi \int_a^b \left([g(x)]^2 - [f(x)]^2 \right) dx$$



(Fig. 26)

Ejemplos:

- Las funciones $g(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2, f(x) = \frac{1}{2}x$ determinan un recinto plano (Fig. 27). Se verifica que $f(x) \leqslant g(x), \forall\ x \in [0,3]$.



(Fig. 27)

El sólido de revolución que se obtiene al girar dicho recinto alrededor del eje OX tiene por volumen:

$$V = \pi \int_0^3 ([g(x)]^2 - [f(x)]^2) dx = \pi \int_0^3 \left[\left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right)^2 - \frac{1}{4}x^2 \right] dx =$$

$$= \pi \int_0^3 \left[\frac{1}{4}x^4 + 4x^2 - 2x^3 - \frac{1}{4}x^2 \right] dx =$$

$$= \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{15}{4}x^2 \right) dx =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{15}{12}x^3 \right]_0^3 = \frac{27}{5}\pi$$

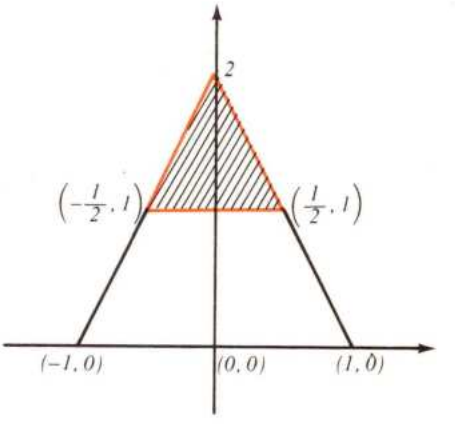
- Consideremos las funciones:

$g: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 2 + 2x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

$f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1$

Se tiene que $f(x) \leqslant g(x), \forall\ x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$.

Las gráficas de f y g determinan un recinto plano que es un triángulo (Fig. 28).



(Fig. 28)

18. Calcula el volumen del sólido de revolución que determina al girar alrededor de OX el recinto determinado por $f(x) = e^x$ y las rectas $x = 0, \quad x = 1$.

19. La parábola $y^2 = x + 1$ y la recta $x = 1$ determinan un recinto plano. Calcula el volumen del sólido que determina al girar alrededor de OX.

20. Dada la función $f: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 3/2 \\ 3/2 & \text{si} \quad 3/2 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

calcula el volumen del sólido que engendra al girar alrededor del eje OX.

El volumen que determina al girar alrededor de OX es:

$$V = \pi \int_{-1/2}^{1/2} \left([g(x)]^2 - [f(x)]^2 \right) dx =$$

$$= \pi \left[\int_{-1/2}^{1/2} [g(x)]^2 dx - \int_{-1/2}^{1/2} [f(x)]^2 dx \right]$$

Ahora bien $\int_{-1/2}^{1/2} [g(x)]^2 dx - \int_{-1/2}^{1/2} [f(x)]^2 dx =$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} [g(x)]^2 dx - \int_{-1/2}^{1/2} 1 dx = \int_{-1/2}^{1/2} [g(x)]^2 dx - 1$$

Como $\int_{-1/2}^{1/2} [g(x)]^2 dx = \int_{-1/2}^{0} [g(x)]^2 dx + \int_{0}^{1/2} [g(x)]^2 dx =$

$$= \int_{-1/2}^{0} (2+2x)^2 dx + \int_{0}^{1/2} (2-2x)^2 dx =$$

$$\int_{-1/2}^{0} (4+4x^2+8x) dx + \int_{0}^{1/2} (4+4x^2-8x) dx =$$

$$= \left[4x + \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 \right]_{-1/2}^{0} + \left[4x + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 \right]_{0}^{1/2} =$$

$$= - \left[4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^3 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right] +$$

$$+ \left[4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] = \frac{7}{6} + \frac{7}{6} = \frac{7}{3}$$

Así obtenemos, para el volumen pedido, el valor:

$$V = \pi \left(\frac{7}{3} - 1 \right) = \frac{4}{3} \pi$$

21. El recinto determinado por las funciones $f(x) = 3$, $g(x) = 4$ y el eje OX entre las ordenadas $x = 0$, $x = 5$ gira alrededor del eje OX.

Calcula el volumen del sólido engendrado.

22. Dadas las funciones $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = 2 - 2x^2$, calcula el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor de OX el recinto que determinan las funciones dadas.

4 Trabajo de una fuerza

Si deslizamos una piedra de un punto "a" a otro punto "b", se realiza lo que en términos físicos se llama un trabajo. ¿Qué factores intervienen en ese trabajo? Primeramente, la fuerza que realizamos para desplazar la piedra, en segundo lugar la fuerza de rozamiento y finalmente la distancia recorrida. Supongamos que trasladamos la piedra a lo largo de una línea recta una distancia b sobre una superficie sin rozamiento. Para realizar esta acción supongamos que empleamos una fuerza constante c cuyo vector es paralelo a la recta de desplazamiento. El trabajo realizado se define:

$$\text{TRABAJO} = c \cdot b$$

Es decir: el producto de la fuerza que hemos empleado por la distancia recorrida.

Si consideramos la función F: [0, b] $\longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $F(x) = c$, $\forall\ x \in [0, b]$, se tiene:

$$cb = \int_0^b F(x)dx$$

Hemos puesto en forma de integral el trabajo realizado.

En general, la fuerza que se emplea para realizar un trabajo no es siempre constante, sino que es una función $F(x)$ (función fuerza), donde x es el lugar (o posición) en el que estamos aplicando esta fuerza. Según esto, se define el trabajo rectilíneo de la siguiente forma:

Sea $F(x)$ una función real de variable real. Supongamos que $F(x)$ representa una función fuerza entre ciertos límites de x. Se denomina trabajo realizado por F entre los puntos $x = a$, $x = b$ (W_a^b) al valor

$$W_a^b = \int_a^b F(x)\,dx$$

Físicamente, el trabajo se da en unidades de trabajo (U.T), dependiendo del sistema que se maneje. Estas unidades son unidades de fuerza por unidades de distancia recorrida.

Ejemplos:

- Entre ciertos límites, la fuerza necesaria para alargar un resorte viene dada por la función $F(x) = kx$, donde x es el alargamiento y k una constante llamada constante de rigidez del resorte. El trabajo necesario para alargarlo una longitud b viene dado por:

$$W_0^b = \int_0^b kx\,dx = k\ \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{k\,b^2}{2}\ \text{U.T.}$$

- Supongamos que una partícula se desplaza a lo largo del eje OX mediante una fuerza impulsora dada por la función $F(x) = 3x^2 + 2$. Vamos a calcular el trabajo necesario para desplazar esta partícula desde el punto $x = 1$ hasta $x = 2$.

$$W_1^2 = \int_1^2 F(x)dx = \int_1^2 (3x^2 + 2)dx = \left[3\frac{x^3}{3} + 2x\right]_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_1^2 = 9\ \text{U.T.}$$

23. Calcula la constante de rigidez de un muelle si el trabajo que realizamos para estirarlo 1 metro son 100 U.T.

24. Una fuerza impulsora dada por $F(x) = 2x + 3$ realiza un trabajo de 4 U.T. para desplazar una partícula una distancia b a lo largo de OX desde el origen. Calcula la distancia b recorrida por la partícula.

Ejercicios y cuestiones

25. Calcula el área del recinto que determinan las funciones $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = -e^{-x}$, $y = -e^x$ y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

26. Dada la función f: $[0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \\ -x+3 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 3, \end{cases}$$

calcula el área que determina con OX.

27. Calcula, mediante una integral, el área de un triángulo rectángulo que tiene catetos de longitud a y b.

28. Calcula, mediante una integral, el área de un rectángulo de base a y altura b.

29. Dadas las funciones $g(x) = -x^2$, $f(x) = -1$, calcula el área del recinto que determinan.

30. Calcula el área del recinto que determinan las funciones $f(x) = |x|$, $g(x) = 2$.

31. Dada la función escalonada E: $[0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 2 & \text{si} \quad 1/2 < x \leqslant 1 \\ -2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 3, \end{cases}$$

calcula el volumen determinado por la gráfica de E al girar alrededor de OX entre las rectas $x = 0$, $x = 3$.

32. Calcula, mediante una integral, el volumen de un cilindro de revolución de altura h y de base un círculo de radio r.

33. Calcula, mediante una integral, el volumen de un cono de revolución de altura h y de base un círculo de radio r.

34. Calcula el volumen del sólido de revolución que determina el recinto limitado por la función $y = |x|$ y las rectas $x = -1$, $x = 1$, al girar alrededor de OX.

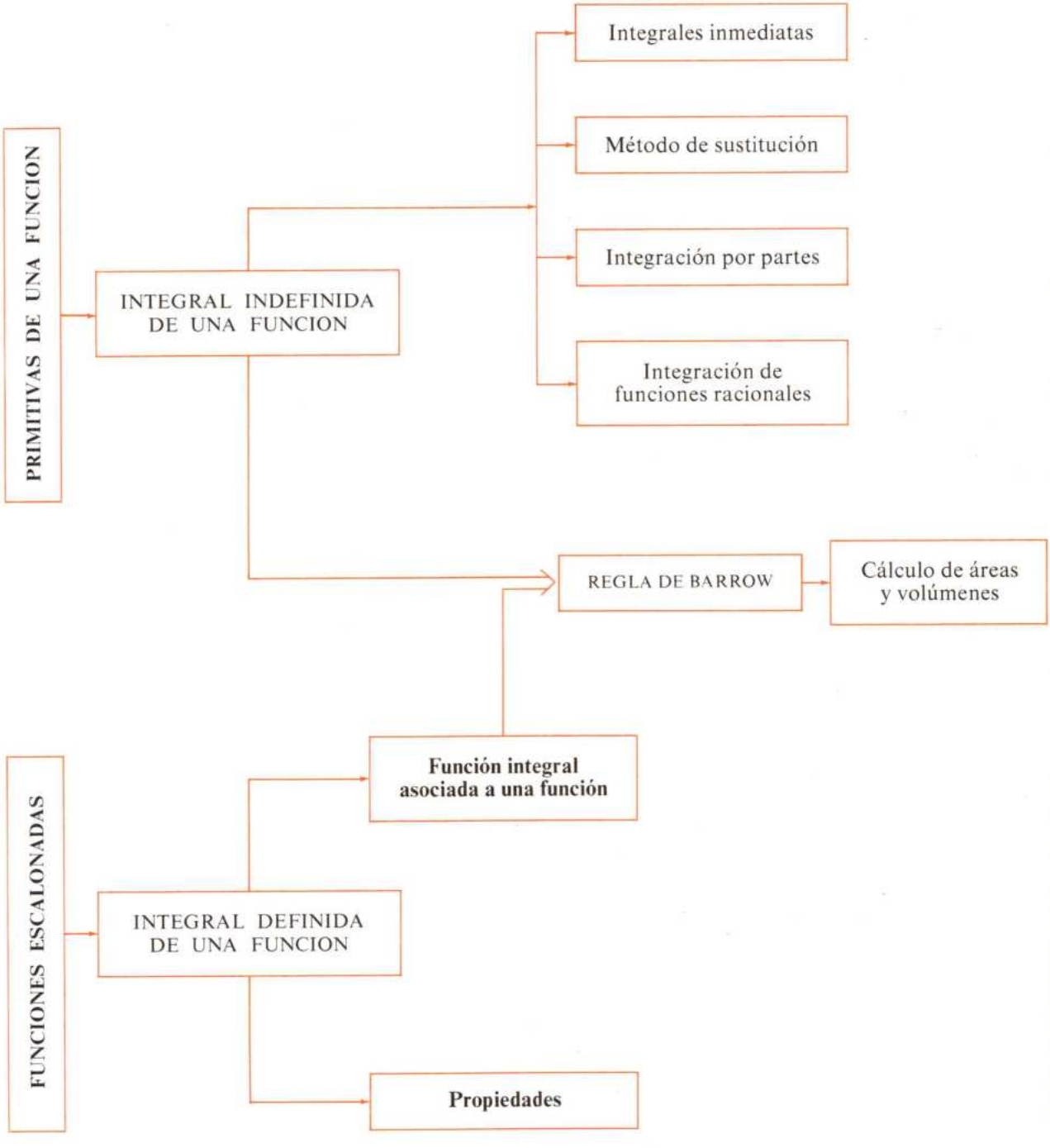
35. Calcula el volumen de la esfera que determina el círculo $x^2 + y^2 = 1$ al girar alrededor de OX.

36. Calcula el volumen que determina $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ al girar alrededor de OX.

37. Una partícula se mueve a lo largo de OX mediante una fuerza impulsora dada por la función $F(x) = ax + b$. Calcula a, b sabiendo que se necesitan 100 U.T. para desplazar la partícula 10 unidades a partir del origen y 50 U.T. para desplazarla 6 unidades a partir del origen.

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD 6

CALCULO INTEGRAL



Unidad 7

ESTADISTICA

Aunque has estudiado en el primer curso de bachillerato las primeras nociones sobre estadística y probabilidad, iniciamos la Unidad recordando conceptos tales como espacio muestral, suceso, probabilidad, etc., que son indispensables para entender lo que sigue.

En el primer tema de esta Unidad, se estudian las funciones de distribución de variables aleatorias discretas y continuas; en el segundo tema se aborda el estudio de dos distribuciones importantes: la binomial y la normal.

La Unidad finaliza con un estudio de las distribuciones bidimensionales discretas y de la recta de regresión.

Tema 23

1. Nociones previas.
2. Variables aleatorias.
3. Funciones de probabilidad de una variable aleatoria discreta.
4. Esperanza y varianza de una variable aleatoria discreta.
5. Función de distribución de una variable aleatoria discreta.
6. Distribuciones continuas.

Tema 24

1. Experimentos de Bernouilli.
2. Distribución binomial o de Bernouilli.
3. Distribución normal.

Tema 25

1. Procesos doblemente aleatorios.
2. Funciones bivariables discretas de probabilidad.
3. Regresión lineal.
4. Recta de regresión de mínimos cuadrados.
5. Correlación lineal.
6. Coeficiente de correlación lineal.

Tema 23

VARIABLES ALEATORIAS. FUNCIONES DE DISTRIBUCION

Después de recordar algunos conceptos de cursos anteriores que se utilizarán a lo largo de la Unidad, se dedica este tema al estudio de las variables aleatorias discretas y continuas.

Para las variables aleatorias discretas se definen sus funciones de probabilidad y de distribución; para las continuas se establecen estos mismos conceptos, aunque requieren un instrumento de cálculo poderoso: la integral.

1 Nociones previas

Las siguientes definiciones se vieron en el primer curso de B.U.P. y se utilizarán con frecuencia en esta Unidad.

1.1. *Se dice que un experimento o proceso es aleatorio cuando al repetirlo en análogas condiciones es imposible predecir el resultado.*

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama *espacio muestral.*

Ejemplo:

- Consideremos el experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda al aire dos veces. Llamemos c al suceso que consiste en obtener cara en un lanzamiento y x al suceso de obtener cruz. Escribiremos (c, x) para indicar que hemos obtenido cara en el primer lanzamiento y cruz en el segundo. Con esta notación el espacio muestral asociado a este experimento viene definido por:

$$E = \{(c, c), (c, x), (x, c), (x, x)\}$$

1.2. Dado un experimento aleatorio cuyo espacio muestral es E, *se llama suceso a cada uno de los subconjuntos de* E. El conjunto $\mathscr{P}(E)$ se llama *espacio de sucesos.*

Ejemplo:

- En el espacio muestral $E = \{c, x\}$ asociado al experimento de lanzar una moneda, el espacio de sucesos es:

$$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{c\}, \{x\}, \{c, x\}\}$$

Los sucesos de este espacio son los siguientes:

$\varnothing$: No salir ni cara ni cruz (Suceso imposible);

$\{c\}$: Salir cara; $\{x\}$: Salir cruz;

$E = \{c, x\}$ Salir cara o cruz (Suceso seguro).

1.3. *Dados dos sucesos, A y B, diremos que son incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.*

Dos sucesos, A y A', se dice que son *contrarios o complementarios si se verifica:* $\begin{cases} \text{a) } A \cap A' = \varnothing \text{ (Son incompatibles)} \\ \text{b) } A \cup A' = E \end{cases}$

Ejemplo:

- En el experimento aleatorio de lanzar un dado consideremos los sucesos: *A:* Obtener par; *B:* Obtener 3 ó 5; *C:* Obtener impar.

  A y B son incompatibles pero no contrarios.

  A y C son incompatibles y además contrarios.

1.4. *Probabilidad*

Sean $\mathscr{P}(E)$ un espacio de sucesos y $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales. *Se llama probabilidad a una aplicación* $p: \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ *que verifica:*

a) para todo suceso $A \in \mathscr{P}(E)$, $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$

b) $p(E) = 1$

c) para todo par de sucesos A y B incompatibles

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

1.5. Se verifican las siguientes propiedades (ver 1.º B.U.P. **Santillana**):

a) Si $A_1, A_2, \ldots A_n$ son sucesos incompatibles, entonces

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n)$$

b) Si el espacio muestral E consta de n sucesos equiprobables entre sí, y de ellos k son favorables a la realización del suceso A, entonces $p(A) = \dfrac{k}{n} = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$

c) Si A y A' son sucesos contrarios, se verifica: $p(A') = 1 - p(A)$

d) $p(\varnothing) = 0$

e) Si A y B son dos sucesos compatibles de $\mathscr{P}(E)$, se verifica:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

f) Si $A \subset B$, entonces $p(A) \leqslant p(B)$

Ejercicios:

1. Dos sucesos, A y B, son independientes cuando la realización de A no influye en la de B y recíprocamente. Si A y B son independientes, se verifica:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).$$

Teniendo en cuenta la anterior definición, calcula la probabilidad de obtener dos reyes al extraer dos cartas: una de una baraja y la otra carta de otra baraja.

2. Si A y B no son sucesos independientes, se verifica: $P(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$, donde $p(B/A)$ es la probabilidad de que ocurra B, supuesto que ocurrió A. Teniendo en cuenta esta fórmula, halla la probabilidad de obtener dos reyes de una baraja en dos extracciones consecutivas:

a) si se devuelve la carta extraída,

b) si no se devuelve.

2 Variables aleatorias

2.1. Sean E un espacio muestral y $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.

Una variable aleatoria (V.A.) es una aplicación $X{:}E \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplos:

- Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado y anotar los puntos que se obtienen. El espacio muestral viene dado por $E = \{1,2,3,4,5,6\}$.

  Las aplicaciones

  $$E \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$
  $$E \xrightarrow{Y} \mathbb{R}$$

  definidas por $X(i) = i$, $\forall i \in E$

  $$Y(i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \text{ es par} \\ 1 & \text{si} \quad i \text{ es impar} \end{cases}$$

  son dos variables aleatorias distintas definidas sobre el mismo espacio muestral.

  X: es la variable aleatoria que nos expresa el número de puntos obtenidos en el lanzamiento del dado, e Y nos da la paridad del resultado del experimento.

- Sea $E = \{(c,c), (c,x), (x,c), (x,x)\}$ el espacio muestral asociado al experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire dos veces.

  La aplicación

  $$\begin{aligned} E &\xrightarrow{X} \mathbb{R} \\ (c, c) &\longrightarrow X(c, c) = 2 \\ (c, x) &\longrightarrow X(c, x) = 1 \\ (x, c) &\longrightarrow X(x, c) = 1 \\ (x, x) &\longrightarrow X(x, x) = 0 \end{aligned}$$

  es una variable aleatoria X, que denota el número de caras obtenidas en los dos lanzamientos.

- Consideremos el experimento aleatorio que consiste en elegir una persona en una determinada ciudad. Como cualquier persona de dicha ciudad puede ser elegida, el espacio muestral es el conjunto de todos los habitantes de la ciudad. La aplicación

  $$\begin{aligned} E &\xrightarrow{X} \mathbb{R} \\ e \in E &\longrightarrow X(e) = \text{estatura del individuo } e \text{ es una V.A.} \end{aligned}$$

3. Considera el experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda al aire tres veces. Sea X la V.A. que indica el número de caras obtenidas. Escribe el espacio muestral E y define la variable aleatoria X.

4. Se lanza un dado dos veces y se anotan los puntos obtenidos. Si X es la V.A. que denota la suma de puntos obtenidos, ¿cómo está definida X? Calcula $\text{Im}(X)$.

5. Consideremos el experimento aleatorio que consiste en averiguar el número de hijos varones que tiene una familia de tres hijos. Halla el espacio muestral del experimento y define la V.A. que denota el número de hijos varones.

En los dos primeros ejemplos las variables aleatorias consideradas toman un número finito de valores; su conjunto imagen es finito.

En el último ejemplo tenemos una situación diferente. La estatura de un individuo puede tomar cualquier valor entre ciertos extremos.

Si suponemos que como mínimo un individuo puede medir 0'40 m y como máximo 2'50 m, la variable aleatoria X del último ejemplo puede tomar cualquier valor del intervalo [0'40, 2'50]. Obsérvese que este conjunto es un intervalo de la recta real y por tanto un conjunto no finito.

2.2. Una variable aleatoria $X: E \longrightarrow \mathbb{R}$ que tome un número finito de valores la llamaremos V.A. *discreta.*

En el caso de que X pueda tomar cualquier valor de un intervalo de $\mathbb{R}$, se dice *continua.*

Ejemplos:

- Las V.A. de los dos primeros ejemplos de **2.1.** son discretas. El caso de la estatura es un ejemplo de V.A. continua.
- Consideremos el experimento aleatorio que consiste en elegir un individuo de una determinada ciudad. Sea E el espacio muestral (los individuos de la ciudad). Consideremos las aplicaciones:

$$E \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$

$$e \longrightarrow X(e) = \text{peso del individuo } e$$

$$E \xrightarrow{Y} \mathbb{R}$$

$$e \longrightarrow Y(e) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad e \text{ está enfermo} \\ 1 & \text{si} \quad e \text{ no está enfermo} \end{cases}$$

X e Y son dos variables aleatorias: X es continua e Y discreta.

X puede tomar cualquier valor de un cierto intervalo e Y tiene por imagen el conjunto $\{0, 1\}$

2.3. Consideremos $X: E \longrightarrow \mathbb{R}$ una V.A. Sea $x \in \mathbb{R}$. Emplearemos las siguientes notaciones:

$$[X = x] = \{e \in E | X(e) = x\}$$
$$[X \leqslant x] = \{e \in E | X(e) \leqslant x\}$$
$$[X \geqslant x] = \{e \in E | X(e) \geqslant x\}$$

Análogamente, si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$[x_1 \leqslant X \leqslant x_2] = \{e \in E | x_1 \leqslant X(e) \leqslant x_2\}$$

Observa que estos conjuntos son subconjuntos de E y, por lo tanto, sucesos.

6. Las variables aleatorias de los problemas anteriores, ¿son continuas o discretas? ¿Por qué?

7. Consideremos la V.A. que nos da la duración de la vida de un individuo. ¿Es discreta o continua? ¿Por qué?

8. Supongamos una urna que tiene cuatro bolas negras y dos blancas. Consideremos el experimento que consiste en extraer tres bolas, sin devolución, de la urna.

Escribe el espacio muestral y define las siguientes V.A.

a) X = número de bolas negras obtenidas,

b) Y = número de bolas blancas obtenidas.

¿Son discretas o continuas?

Ejemplos:

- Sea X la V.A. que expresa el número de puntos obtenidos al lanzar un dado.

$$[X = 5] = \{i \in E | X(i) = 5\} = \{5\}$$
$$[X \leqslant 2] = \{i \in E | X(i) \leqslant 2\} = \{1, 2\}$$
$$[3 \leqslant X \leqslant 6] = \{i \in E | 3 \leqslant X(i) \leqslant 6\} = \{3, 4, 5, 6\}$$

$[X = 5]$ es el suceso que consiste en obtener cinco puntos.

$[X \leqslant 2]$ sería el suceso que consiste en obtener menos de tres puntos, es decir, uno o dos: $[X \leqslant 2] = [X = 1] \cup [X = 2]$.

$[3 \leqslant X \leqslant 6]$ es el suceso que consiste en sacar entre tres y seis puntos, ambos inclusive, o bien el suceso que consiste en obtener al menos tres puntos.

Observemos:

$$[3 \leqslant X \leqslant 6] = [X = 3] \cup [X = 4] \cup [X = 5] \cup [X = 6]$$

- Sea X la V.A. que nos da la estatura de un individuo de una cierta población.

$[X \leqslant 1'75] = \{e \in E | X(e) \leqslant 1'75\}$ representa el conjunto de los individuos que miden a lo sumo 1'75 m.

$[X = 1'70] = \{e \in E | X(e) = 1'70\}$ es el conjunto de los individuos que miden exactamente 1'70 m.

$[X \geqslant 1'75] = \{e \in E | X(e) \geqslant 1'75\}$ son los individuos que miden como mínimo 1'75 m.

$[1'50 \leqslant X \leqslant 1'80] = \{e \in E | 1'50 \leqslant X(e) \leqslant 1'80\}$ son los individuos cuya estatura está comprendida entre 1'50 y 1'80, ambos inclusive.

9. Sea $X: E \longrightarrow \mathbb{R}$ una V.A. Define los siguientes sucesos:

a) $[X < x]$, $x \in \mathbb{R}$

b) $[X > x]$, $x \in \mathbb{R}$

c) $[x_1 < X < x_2]$ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

10. Si $X: E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una V.A., demuestra que $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

a) $[x_1 \leqslant X \leqslant x_2] = [X \geqslant x_1] \cap [X \leqslant x_2]$

b) $[x_1 < X < x_2] = [x > x_1] \cap [x < x_2]$

c) $[x_1 \leqslant X < x_2] = [X \geqslant x_1] \cap [X < x_2]$

11. Sea $X: E \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria.

Si $A \subset E$ es un suceso y A' (complementario de A) es el suceso contrario, demuestra $\forall\ x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

a) $[X \leqslant x]' = [X > x]$

b) $[x_1 \leqslant X \leqslant x_2]' = [X < x_1] \cup [X > x_2]$

c) $[x_1 < X < x_2]' = [X \leqslant x_1] \cup [X \geqslant x_2]$

12. Si X e Y son las V.A. del ejercicio **8**, calcula los siguientes sucesos e indica cuáles son iguales:

a) $[X \leqslant 2]$ d) $[Y > 2]$

b) $[Y = 2]$ e) $[X = 0]$

c) $[1 < X \leqslant 3]$ f) $[0 \leqslant Y \leqslant 2]$

3 Funciones de probabilidad de una variable aleatoria discreta

3.1. Sean E un espacio muestral y $\mathscr{P}(E)$ el conjunto de los sucesos. Consideremos una probabilidad definida sobre $\mathscr{P}(E)$

$$p: \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Sea $X: E \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria que tome un número finito de valores, es decir, una variable discreta

$$\text{Im}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Este conjunto imagen se designa también por X.

Si $x_i \in \text{Im}(X)$, el conjunto $[X = x_i] = \{e \in E | X(e) = x_i\}$ es un elemento de $p(E)$ y por tanto podemos calcular $p[X = x_i] = p_i$, que es la probabilidad de que X tome el valor x_i.

La función

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(X) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x_1 &\longrightarrow p(x_1) = p[X = x_1] = p_1 \\ x_2 &\longrightarrow p(x_2) = p[X = x_2] = p_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &\longrightarrow p(x_n) = p[X = x_n] = p_n \end{aligned}$$

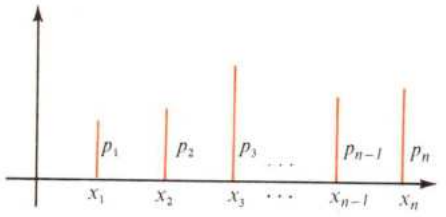
se llama función de probabilidad de la variable aleatoria X.

La representaremos esquemáticamente según el siguiente cuadro, donde se ha escrito X en lugar de $\mathrm{Im}(X)$

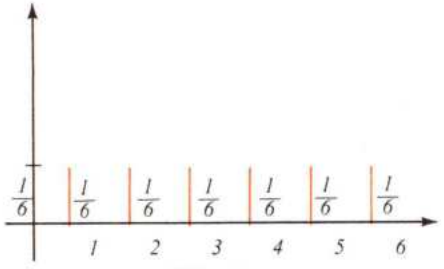
X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$p(X)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Gráficamente esta función se representa mediante un diagrama de barras, como indicamos a continuación.

Suponiendo que los valores que toma X, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ están ordenados de menor a mayor, se representan en el eje de abscisas y sobre cada uno de ellos se trazan ordenadas proporcionales al valor que toma la probabilidad p en ese punto (Fig. 1).



(Fig. 1)



(Fig. 2)

Ejemplos:

- Sea $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el espacio muestral de los resultados que se obtienen al lanzar un dado y X la V.A. que nos da los puntos obtenidos:

$$\begin{aligned} E &\xrightarrow{X} \mathbb{R} \\ i &\longrightarrow X(i) = i \end{aligned}$$

Suponiendo el dado regular, todas las puntuaciones del dado tienen la misma probabilidad de salir, y ésta vale $\frac{1}{6}$. Así:

$$p(1) = p[X = 1] = \frac{1}{6} \qquad p(4) = p[X = 4] = \frac{1}{6}$$

$$p(2) = p[X = 2] = \frac{1}{6} \qquad p(5) = p[X = 5] = \frac{1}{6}$$

$$p(3) = p[X = 3] = \frac{1}{6} \qquad p(6) = p[X = 6] = \frac{1}{6}$$

La función de probabilidad de X la escribimos esquemáticamente:

X	1	2	3	4	5	6
$p(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

En la figura 2 está representada esta función.

13. Si X e Y son las V.A. del ejercicio **8**, calcula sus funciones de probabilidad y representa los diagramas de barras.

14. Consideremos el siguiente juego realizado con cartas de la baraja.

Se extrae una carta de la baraja:

–si se obtiene el as de oros, se ganan 10 puntos,

–si se obtiene el as de copas, se ganan 6 puntos,

–si se obtiene el as de espadas, se ganan 4 puntos,

–si se obtiene el as de bastos, se ganan 3 puntos,

–si no se obtiene ningún as, se pierde 1 punto.

Sea X la V.A. que indica el número de puntos obtenidos en una jugada. Calcula su función de probabilidad y dibuja el diagrama de barras.

• Sea $E = \{(c, c), (c, x), (x, c), (x, x)\}$ el conjunto de todos los resultados posibles obtenidos al lanzar una moneda al aire dos veces y X la V.A. que nos da el número de caras.

Se tiene que $\text{Im}(X) = \{0, 1, 2\}$

Consideremos los sucesos

$$[X = 0] = \{(x, x)\}$$
$$[X = 1] = \{(x, c), (c, x)\}$$
$$[X = 2] = \{(c, c)\}$$

que son, respectivamente, los sucesos consistentes en no sacar cara, obtener exactamente una cara y obtener dos caras.

Si suponemos que la probabilidad de obtener cara es igual a la probabilidad de obtener cruz, todos los sucesos elementales de E tienen la misma probabilidad: $\frac{1}{4}$

Así:

$$p(0) = p[X = 0] = p\left(\{(x, x)\}\right) = \frac{1}{4}$$

$$p(1) = p[X = 1] = p\left(\{(x, c), (c, x)\}\right) p\left(\{(x, c)\} \cup \{(c, x)\}\right) =$$
$$= p\left(\{(x, c)\}\right) + p\left(\{(c, x)\}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$p(2) = p[X = 2] = p\left(\{(c, c)\}\right) = \frac{1}{4}$$

La función de probabilidad de X p: $\text{Im}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida del modo siguiente:

X	0	1	2
$p(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

cuya representación gráfica corresponde a la figura 3.

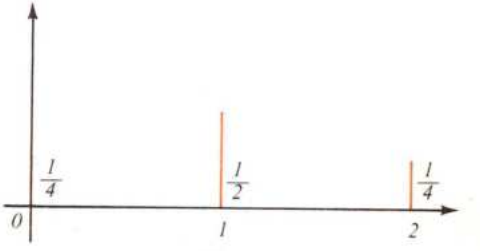
3.2. Sea X una V.A. que toma un número finito de valores $x_1, x_2, \ldots x_n$. La función de probabilidad dada por

X	x_1	x_2	...	x_n
$p(X)$	p_1	p_2	...	p_n

verifica:

a) $p_i \geqslant 0, \forall\ i$

b) $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$



(Fig. 3)

15. Dada la función de probabilidad de la variable aleatoria X

X	2	4	6	8
$p(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

calcula:

a) $p[1 < X \leqslant 5]$

b) $p[X > 4]$

c) $p[X > 8]$

d) $p[X \leqslant 8]$

16. Sea una V.A. que tiene por función de probabilidad la dada por

X	-1	3	5	7
$p(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	p_4

se pide:

a) El valor de p_4.

b) Dibuja el diagrama de barras.

c) $p[3 \leqslant X \leqslant 5], p[X > 0], p[X < 6], p[X = 6]$

En efecto: los números $p_1, p_2, \ldots p_n$ son todos positivos dado que son probabilidades de sucesos y la probabilidad es, por definición, mayor o igual que cero.

Por otra parte, como X es una aplicación de E con valores en $\mathbb{R}$ y su imagen es $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, se verifica:

$$E = [X = x_1] \cup [X = x_2] \cup \ldots \cup [X = x_n]$$

y por ser disjuntos:

$$p(E) = p[X = x_1] \cup [X = x_2] \cup \ldots \cup [X = x_n] =$$
$$= p[X = x_1] + p[X = x_2] + \ldots + p[X = x_n] = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

Como $p(E) = 1$ por definición, se obtiene:

$$1 = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$$

17. Define una función de probabilidad de una V.A. discreta y dibuja su gráfica.

18. Si X es una V.A. discreta que tiene por función de probabilidad

X	-2	-1	0	1	2
$p(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	p_3	p_4	$\frac{1}{10}$

calcula p_3 y p_4 sabiendo que $p_3 = p[X \leqslant -1]$

4 Esperanza y varianza de una variable aleatoria discreta

4.1. Dada una variable que toma los valores $x_1, x_2, \ldots x_n$, se define la distribución de frecuencias de X como una tabla de la forma siguiente:

Frec.	f_1	f_2	.	.	.	f_n
X	x_1	x_2	.	.	.	x_n

donde f_1 es la frecuencia con que X toma el valor x_1, f_2 la frecuencia con que X toma el valor x_2, etc. En general: f_i es la frecuencia con que X toma el valor x_i; $i = 1, 2, \ldots n$.

Se define la media aritmética de la distribución de frecuencias por la expresión

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

que se puede escribir:

$$\bar{x} = x_1 \frac{f_1}{\sum_{i=1}^{n} f_i} + x_2 \frac{f_2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} + \ldots + x_n \frac{f_n}{\sum_{i=1}^{n} f_i}, \text{ donde}$$

$\frac{f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = h_i$ es la frecuencia relativa del valor x_i.

Así resulta: $\bar{x} = x_1\ h_1 + x_2\ h_2 + \ldots + x_n\ h_n$, que es otra expresión de la media aritmética.

Se define la varianza de la distribución de frecuencias por la expresión

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 f_1 + (x_2 - \bar{x})^2 f_2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} =$$

$$= (x_1 - \bar{x})^2 \frac{f_1}{\sum_{i=1}^{n} f_i} + (x_2 - \bar{x})^2 \frac{f_2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 \frac{f_n}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$$s^2 = (x_1 - \bar{x})^2\ h_1 + (x_2 - \bar{x})^2\ h_2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2\ h_n$$

Como la frecuencia relativa es un ejemplo de probabilidad, la función de probabilidad de la variable X es:

X	x_1	x_2	...	x_n
$p(X)$	h_1	h_2	...	h_n

Como no siempre la probabilidad que se utiliza es la frecuencia relativa, vamos a generalizar el concepto de media y varianza para una función de probabilidad cualquiera. Estas generalizaciones son los conceptos de esperanza y varianza de una variable aleatoria.

4.2. Sea $X\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria con una función de probabilidad dada por

X	x_1	x_2	...	x_n
$p(X)$	p_1	p_2	...	p_n

La expresión

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

se llama *esperanza* o *media de X*.

Ejemplos:

- Sea X una V.A. que tiene por función de probabilidad

X	1	2	3	4	5	6
$p(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

entonces:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3'5$$

• Consideremos la siguiente función de probabilidad:

X	0	1
$p(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Se tiene: $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

4.3. Dada una variable aleatoria $X: E \longrightarrow \mathbb{R}$ con una función de probabilidad definida por

X	x_1	x_2	...	x_n
$p(X)$	p_1	p_2	...	p_n

se llama varianza de X, y se indica $\mathrm{Var}(X)$, a la expresión $\mathrm{Var}(X) = (x_1 - E(X))^2\ p_1 + (x_2 - E(X))^2\ p_2 + \ldots + (x_n - E(X))^2\ p_n =$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2\ p_i$$

Ejemplos:

• Consideremos

X	0	1
$p(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Se tiene que $E(X) = \frac{1}{2}$, por lo tanto

$$\mathrm{Var}(X) = \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

• Sea la V.A. con función de probabilidad dada por la tabla

X	1	2	3	4	5	6
$p(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Hemos visto que $E(X) = \frac{7}{2}$. Por tanto:

$$\mathrm{Var}(X) = \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(3 - \frac{7}{2}\right)^2 \frac{1}{6} +$$

$$+ \left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(5 - \frac{7}{2}\right)^2 \frac{1}{6} + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{6} \cdot \frac{70}{4} = \frac{35}{12}$$

19. Un individuo compra una rifa para un sorteo en el cual hay tres premios: el primer premio está dotado con 25.000 ptas, el segundo con 15.000 y el tercero con 10.000. La probabilidad del 1.er premio es $\frac{1}{5.000}$, la de ganar el 2.º premio es $\frac{1}{3.000}$ y la de ganar el 3.º es $\frac{1}{1.000}$. Sea X la V.A. que indica la ganancia en el sorteo. Calcula $E(X)$.

4.4. Se llama desviación típica de una variable aleatoria X a $\sqrt{\text{Var}(X)}$, y se escribe:

$$dt(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Ejemplos:

- Dada

X	0	1
$p(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

la desviación típica de X es: $\sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

- En el caso de

X	1	2	3	4	5	6
$p(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

la desviación típica es $\sqrt{\frac{35}{12}}$

20. Dada la variable aleatoria X con función de probabilidad

X	-2	-1	0	2	4
$p(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

calcula:

a) $E(X)$

b) $\text{Var}(X)$

c) la desviación típica de X.

21. Si X e Y son las V.A. del ejercicio **8**, calcula:

a) $E(X)$, $\text{Var}(X)$

b) $E(Y)$, $\text{Var}(Y)$

5 Función de distribución de una variable aleatoria discreta

En este párrafo vamos a asociarle a una V.A. discreta una función real de variable real que se llama su función de distribución. Esta es una generalización del concepto de distribución de frecuencias relativas acumuladas de una variable que toma un número finito de valores (Ver Matemática 1.º B.U.P. **Santillana**).

5.1. Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio muestral E.

Supongamos definida en E una probabilidad p.

La función $\mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ definida por $F(x) = p[X \leqslant x]$

se denomina *función de distribución de la variable aleatoria X.*

Ejemplos:

- Sea X la variable aleatoria que nos determina el número de caras que se pueden obtener al lanzar una moneda al aire dos veces.

  La función de probabilidad es

X	0	1	2
$p(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

  Calculemos su función de distribución $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

  Si $x \in \mathbb{R}$ y $x < 0$, entonces $p[X \leqslant x]$ es la probabilidad de obtener menos de cero caras. El obtener menos de cero caras es el suceso imposible, por tanto $p[X \leqslant x] = 0$

  Si $x \in \mathbb{R}$ y $0 \leqslant x < 1$, $p[X \leqslant x]$ es la probabilidad de obtener menos de una cara; por tanto:

$$0 \leqslant x < 1 \Rightarrow p[X \leqslant x] = p[X = 0] = \frac{1}{4}$$

  Con el mismo razonamiento podemos calcular la probabilidad de obtener a lo más una cara:

$$1 \leqslant x < 2 \Rightarrow p[X \leqslant x] = p\big([X = 0] \cup [X = 1]\big).$$

  Como $[X = 0]$ y $[X = 1]$ son dos sucesos incompatibles resulta:

$$p\big([X = 0] \cup [X = 1]\big) =$$

$$= p[X = 0] + p[X = 1] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$$

  y la probabilidad de obtener a lo más dos caras:

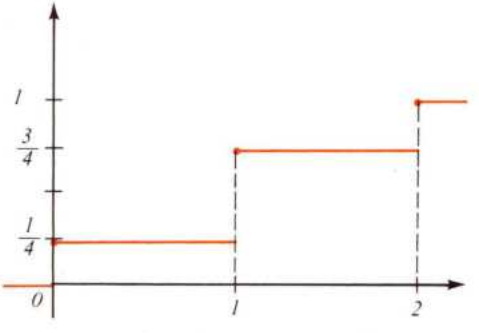
$$2 \geqslant x, p[X \leqslant x] = p\big([X = 0] \cup [X = 1] \cup [X = 2]\big) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

  Por tanto, la función de distribución de $X: \mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}$ está definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si} \quad 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 \leqslant x \end{cases}$$

  La gráfica de esta función escalonada es la de la figura 4.



(Fig. 4)

• Consideremos la función de probabilidad

X	0	1
$p(X)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Hallemos su función de distribución.

Si $x < 0$, $[X \leqslant x] = \varnothing$, dado que X no toma valores menores que 0.

Si $0 \leqslant x < 1$, $[X \leqslant x] = [X = 0]$, pues si X toma un valor menor que 1, éste tiene que ser 0.

Si $1 \leqslant x$, $[X \leqslant x] = [X = 0] \cup [X = 1]$, dado que los valores que toma X son $\{0, 1\}$

Así: $x < 0 \Rightarrow p\,[X \leqslant x] = 0$

$$0 \leqslant x < 1 \Rightarrow p\,[X \leqslant x] = p\,[X = 0] = \frac{1}{2}$$

$$1 \leqslant x \Rightarrow p\,[X \leqslant x] = p\left([X = 0] \cup [X = 1]\right) =$$

$$= p\,[X = 0] + p\,[X = 1] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Por tanto, la función de distribución es

$$\mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \end{cases} \quad \text{(Fig. 5)}$$

5.2. Sea X una V.A. que tiene por función de probabilidad

X	x_1	x_2	...	x_n
$p(X)$	p_1	p_2	...	p_n

Calculemos su función de distribución. Sea $x \in \mathbb{R}$

Si $x < x_1 \Rightarrow [X \leqslant x] = \varnothing \Rightarrow p\,[X \leqslant x] = 0$

Si $x_1 \leqslant x < x_2 \Rightarrow [X \leqslant x] = [X = x_1] \Rightarrow p[X \leqslant x] = p[X = x_1] = p_1$

Si $x_2 \leqslant x < x_3 \Rightarrow [X \leqslant x] = [X = x_1] \cup [X = x_2] \Rightarrow p[X \leqslant x] =$

$$= p_1 + p_2$$

Si $x_3 \leqslant x < x_4 \Rightarrow [X \leqslant x] = [X = x_1] \cup [X = x_2] \cup [X = x_3] \Rightarrow$

$$\Rightarrow p[X \leqslant x] = p_1 + p_2 + p_3$$

. . . . . .

Si $x_{n-1} \leqslant x < x_n \Rightarrow [X \leqslant x] =$

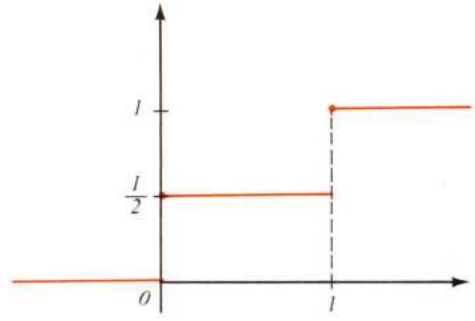
$$= [X = x_1] \cup [X = x_2] \cup \ldots \cup [X = x_{n-1}] \Rightarrow p[X \leqslant x] =$$

$$= p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}$$

Si $x_n \leqslant x \Rightarrow [X \leqslant x] =$

$$= [X = x_1] \cup [X = x_2] \cup \ldots \cup [X = x_n] \Rightarrow p[X \leqslant x] =$$

$$= p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$



(Fig. 5)

22. Dada la variable aleatoria X que tiene una función de probabilidad.

X	-1	0	1
$p(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

calcula y dibuja su función de distribución.

23. Dada la variable aleatoria X con función de probabilidad.

X	-2	-1	0	2	4
$p(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

calcula y representa su función de distribución.

24. Sea X una V.A. discreta y $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ su función de distribución. Demuestra las siguientes relaciones:

a) $p[x < X \leqslant x'] = F(x') - F(x)\ \forall\ x, x' \in \mathbb{R}$

b) $p[X > x] = 1 - F(x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

entonces la función de distribución es:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x_1 \\ p_1 & \text{si} \quad x_1 \leqslant x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{si} \quad x_2 \leqslant x < x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & \text{si} \quad x_3 \leqslant x < x_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} & \text{si} \quad x_{n-1} \leqslant x < x_n \\ 1 & \text{si} \quad x_n \leqslant x. \end{cases}$$

La gráfica es la indicada en la figura 6.

5.3. Del valor obtenido para la función de distribución de una variable aleatoria X en **5.2.** se deducen las propiedades:

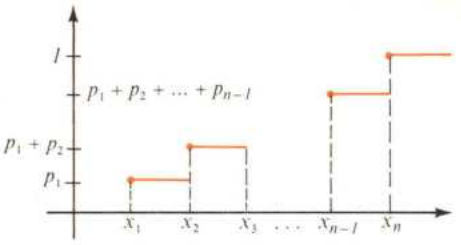
a) $\forall\ x \in \mathbb{R},\ F(x) \geqslant 0$. Esto es consecuencia de que los valores que toma F son probabilidades.

b) F es monótona creciente: $\forall\ x,\ x' \in \mathbb{R},\ x \leqslant x' \Rightarrow F(x) \leqslant F(x')$.
Observemos que

$$0 \leqslant p_1 \leqslant p_1 + p_2 \leqslant p_1 + p_2 + p_3 \leqslant \dots \leqslant p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} \leqslant 1$$

c) $\forall\ x \in \mathbb{R},\ x \geqslant x_n \Rightarrow F(x) = 1$

d) $\forall\ x \in \mathbb{R},\ x < x_1 \Rightarrow F(x) = 0$



(Fig. 6)

25. Consideremos la siguiente función de distribución de una variable aleatoria:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 2 \leqslant x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad 3 \leqslant x \end{cases}$$

Calcula:

a) $p[1 < X \leqslant 3]$ c) $p[X \leqslant 0]$

b) $p[X > 3/2]$ d) $p\left[-\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{5}{2}\right]$

6 Distribuciones continuas

6.1. Consideremos una función $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica las siguientes condiciones:

a) $f(t) \geqslant 0,\ \forall\ t \in [a, b]$

b) f es integrable en $[a, b]$ y además $\int_a^b f(t)dt = 1$

Sea X una variable aleatoria que puede tomar cualquier valor del intervalo $[a, b]$, es decir, una V.A. continua.

Consideremos la función $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \int_a^x f(t)dt & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

Si se verifica que $p[X \leqslant x] = F(x)$, se dice que la variable aleatoria X tiene una función de distribución continua y que F es la función de distribución continua de X.

f se dice una función de densidad de X.

Nota: Observemos que, como la variable X toma valores comprendidos en el intervalo $[a, b]$, la probabilidad de que tome un valor menor que a debe ser 0. Por eso se define $F(x) = 0$ si $x < a$. Análogamente, si $x > b$, el suceso $[X \leqslant x]$ es el suceso seguro, por lo cual $F(x) = 1$ si $x > b$.

6.2. F tiene las siguientes propiedades:

a) $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $F(x) \geqslant 0$

b) F es monótona creciente: $\forall x, x' \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x' \Rightarrow F(x) \leqslant F(x')$

Ejemplos:

- Una V.A. continua X toma valores en el intervalo $[0, 1]$ y tiene una función de densidad dada por

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & kt \end{array}$$

Calculemos el valor de k. Por ser f función de densidad

$$1 = \int_0^1 kt\,dt = k\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = k \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow k = 2$$

Calculemos ahora la función de distribución de X.

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ $F(x) = \int_0^x 2t\,dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = x^2$, por tanto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 7)}$$

- Dada la V.A. continua X cuya función de densidad es:

$$\begin{array}{ccc} [2,4] & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & f(t) = \dfrac{1}{2}, \end{array}$$

calculemos su función de distribución $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Comprobemos que f es una función de densidad de X:

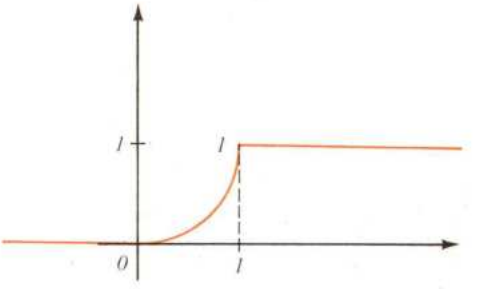
a) $f(t) = \frac{1}{2} \geqslant 0$, $\forall\ t \in [2, 4]$

b) $\int_2^4 f(t)dt = \int_2^4 \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}[t]_2^4 = 1$

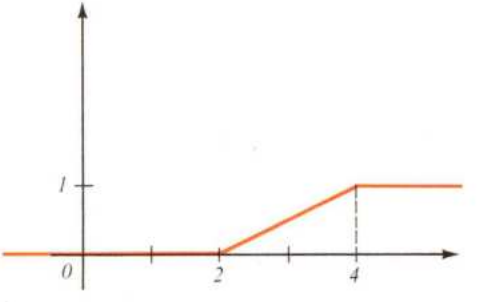
Entonces: si $2 \leqslant x \leqslant 4$, $F(x) = \int_2^x \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}[t]_2^x = \frac{1}{2}(x - 2)$

Por tanto, F viene definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 2 \\ \frac{1}{2}(x-2) & \text{si} \quad 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ 1 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases} \qquad \text{(Fig. 8)}$$



(Fig. 7)



(Fig. 8)

26. Dada la función

$$\begin{array}{ccc} f: [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & f(t) = a\,t^2 \end{array}$$

¿Qué valor debe tomar a para que f sea una función de densidad de una V.A.?

Calcula la función de distribución correspondiente a esta función de densidad.

27. ¿Puede ser la función

$$\begin{array}{ccc} f: [-2,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & f(t) = t^2 + 1 \end{array}$$

una función de densidad de una V.A.? ¿Por qué?

6.3. Sea X una V.A. con función de distribución continua $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se demuestra que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $p[X < x] = p[X \leqslant x]$.

Como consecuencia de este resultado se obtienen las siguientes propiedades:

a) $p[X \geqslant x] = p[X \geq x]$

b) $p[x_1 \leqslant X \leqslant x_2] = p[x_1 < X \leqslant x_2] = p[x_1 \leqslant X < x_2] = p[x_1 < X < x_2]$

6.4. Sean X una V.A. que toma valores en el intervalo $[a, b]$ y $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de densidad de X.

Si $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \leqslant x_2$, se verifica:

$$p[x_1 \leqslant X \leqslant x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \qquad [1]$$

Gráficamente esto significa que la probabilidad de que X tome valores comprendidos entre x_1 y x_2 está dada por el área que encierra f con el eje OX entre las ordenadas de ecuaciones $x = x_1$, $x = x_2$ (Fig. 9).

En efecto:

$$[X \leqslant x_2] = [X \leqslant x_1] \cup [x_1 < X \leqslant x_2]$$

Los sucesos $[X \leqslant x_1]$, $[x_1 < X \leqslant x_2]$ son disjuntos, por tanto:

$$p[X \leqslant x_2] = p[X \leqslant x_1] + p[x_1 < X \leqslant x_2] \Rightarrow p[x_1 < X \leqslant x_2] =$$
$$= p[X \leqslant x_2] - p[X \leqslant x_1] \Rightarrow p[x_1 < X \leqslant x_2] = F(x_2) - F(x_1) =$$
$$= \int_a^{x_2} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt$$

Como $p[x_1 < X \leqslant x_2] = p[x_1 \leqslant X \leqslant x_2]$, se obtiene [1].

Ejemplo:

- Dada la V.A. continua X con función de densidad

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{\ f\ } & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & 2t \end{array}$$

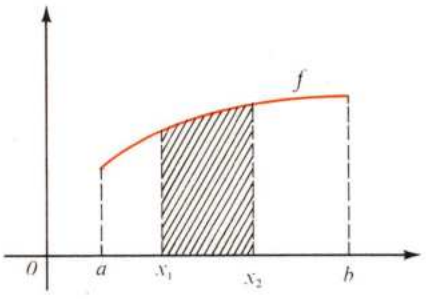
se tiene:

$$p\left[\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{2}\right] = \int_{1/3}^{1/2} 2t\, dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_{1/3}^{1/2} = \frac{5}{36} \quad \text{(Fig. 10)}$$

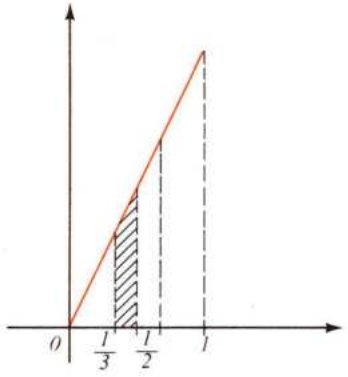
¿Cuánto vale $p[-1 \leqslant X \leqslant 3/4]$? Observemos que X toma sólo valores en $[0, 1]$.

Así tenemos que:

$$p[-1 \leqslant X \leqslant 3/4] = p[0 \leqslant X \leqslant 3/4] = \int_0^{3/4} 2t = \left[t^2\right]_0^{3/4} = \frac{9}{16}$$



(Fig. 9)



(Fig. 10)

28. Pon un ejemplo de función de densidad de una V.A. continua y calcula después su función de distribución.

29. ¿Puede ser la función $f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida $t \in [0, 1] \longrightarrow f(t) = a\, e^t$ una función de densidad de una V.A. con distribución continua? En caso afirmativo, ¿cuánto vale a?

30. Dada la función $f: [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\, t$, demuestra que es función de densidad de una variable aleatoria.

Calcula:

a) $p[1 \leqslant X \leqslant 2]$ c) $p\left[X > \frac{7}{2}\right]$

b) $p[X \leqslant 3]$ d) $p[X < 0]$

Ejercicios y cuestiones

31. Sea X la V.A. que nos da la suma de puntos obtenidos al lanzar un dado dos veces. Escribe los sucesos:

a) $[X = 1]$
b) $[X = 2]$
c) $[2 < X < 5]$
d) $[X > 7]$
e) $[X \leqslant 8]$
f) $[X = 12]$
g) $[2 \leqslant X \leqslant 12]$
h) $[X > 12]$

32. Consideremos una urna con dos bolas blancas, una roja y tres negras. Sea el experimento aleatorio que consiste en extraer dos bolas de la urna sin devolución.

Sean las variables aleatorias:

X = n.º de bolas rojas obtenidas

Y = n.º de bolas negras obtenidas

Z = n.º de bolas blancas obtenidas

Calcula:

a) Sus funciones de probabilidad.

b) $E(X)$, $E(Y)$, $E(Z)$, $\text{Var}(X)$, $\text{Var}(Y)$, $\text{Var}(Z)$

33. En un determinado juego un hombre puede obtener una ganancia de 3.000 ptas. con probabilidad 0'4 y una pérdida de 1.000 ptas. con probabilidad 0'6. Si X es la V.A. que denota la ganancia, calcula $E(X)$.

34. Sea X la V.A. que nos da el número de hijos varones de una familia de tres hijos. Su función de probabilidad está indicada en la siguiente tabla:

X	0	1	2	3
$p(X)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Calcula para una familia de tres hijos:

a) la probabilidad de que sean menos de tres hijos varones,

b) la probabilidad de que la familia tenga más de un hijo varón,

c) la probabilidad de que la familia tenga al menos un varón,

d) $E(X)$, $\text{Var}(X)$.

35. Sea la V.A. del problema anterior. Calcula y dibuja su función de distribución.

36. Dada la variable aleatoria X con función de probabilidad definida

X	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$p(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$

calcula y dibuja su función de distribución.

Tema 24 DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y NORMAL

Se dedica este tema al estudio de las distribuciones binomial y normal.

La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta y se llama así porque en su cálculo se utilizan coeficientes del desarrollo del binomio de Newton; también se llama distribución de Bernouilli por haber sido descubierta por James Bernouilli a finales del siglo XVII.

La distribución normal aparece con mucha frecuencia en el mundo inanimado, así como en el biológico, sociológico, etc.; de ahí la importancia de esta distribución.

1 Experimentos de Bernouilli

1.1. Se llama experimento de Bernouilli de n pruebas al experimento aleatorio que consiste en realizar n pruebas que verifican las siguientes condiciones:

a) En cada prueba son posibles solamente dos sucesos incompatibles, que llamaremos A y B.

b) El resultado de cada prueba es independiente de los resultados anteriores.

c) La probabilidad $p(A)$ de que ocurra A no varía de una prueba a otra.

Ejemplos:

- El lanzamiento de una moneda al aire diez veces es un ejemplo de experimento de Bernouilli de diez pruebas, dado que:

  a) en cada lanzamiento son posibles solamente dos sucesos incompatibles: cara (A) y cruz (B),

  b) el resultado de un lanzamiento es independiente de los resultados anteriores,

  c) la probabilidad de que salga cara, $p(A)$, es siempre la misma, $p(A) = \frac{1}{2}$.

- Los descendientes de una determinada pareja constituyen un experimento de Bernouilli:

  a) En cada nacimiento son posibles dos resultados: varón (A), hembra (B).

  b) El resultado de un parto es independiente de los resultados anteriores.

  c) La probabilidad de A es invariable. Si suponemos que la probabilidad de nacimiento de varones es igual a la de hembras, se tiene $p(A) = \frac{1}{2}$.

- Si suponemos que una máquina que produce determinadas piezas tiene una probabilidad de 0'001 de fabricar una defectuosa, las piezas que produce en un tiempo determinado constituye un experimento de Bernouilli, pues:

  a) una pieza puede resultar defectuosa (A) o no defectuosa (B),

  b) el resultado de una pieza fabricada es independiente de la calidad de las anteriores,

  c) la probabilidad de A es siempre la misma: 0'001.

1.2. En un experimento de Bernouilli se verifica que $p(A) + p(B) = 1$, dado que A y B son los únicos resultados que pueden obtenerse. De aquí que $p(B)$ no varíe de una prueba a otra.

Pondremos $p(A) = p$, $p(B) = 1 - p = q$.

1.3. Consideremos un experimento de Bernouilli de tres pruebas.

Determinemos su espacio muestral E.

Un suceso elemental de E sería, por ejemplo, el obtener

– en la 1.ª prueba: A,

– en la 2.ª prueba: A,

– en la 3.ª prueba: B.

Este suceso elemental lo indicaremos (A, A, B).

Según esto, E sería el conjunto de todas las agrupaciones de tres letras en cada una de las cuales sólo aparecen la letra A o la letra B. Por lo tanto:

$$E = \{(A, A, A), (A, A, B), (A, B, A), (B, A, A), (A, B, B), (B, A, B), (B, B, A), (B, B, B)\}$$

Observemos que E consta de ocho sucesos elementales y que un suceso elemental es una variación con repetición de dos elementos tomados de tres en tres. Así: Card $(E) = VR_2^3 = 2^3$

Ejercicios:

1. Considera una urna con cinco bolas blancas y tres negras. Si se extrae (con devolución) una bola diez veces, ¿es un experimento de Bernouilli? ¿Por qué? ¿Y si las extracciones se efectúan sin devolución?

2. Pon un ejemplo de experimento de Bernouilli de tres pruebas.

3. Considera el lanzamiento de un dado cinco veces. Si A es el suceso que consiste en obtener número par y B el suceso que consiste en obtener impar, ¿es un experimento de Bernouilli?

4. Escribe el espacio muestral de un experimento de Bernouilli de cuatro pruebas. ¿Cuántos elementos tiene?

1.4. En el caso general de un experimento de Bernouilli de n pruebas el espacio muestral correspondiente sería el conjunto de todas las variaciones con repetición de las letras A y B tomadas en grupos de n. Se tiene por tanto:

$$\textbf{Card}\ (E) = VR_2^n = 2^n$$

2 Distribución binomial o de Bernouilli

2.1. Consideremos un experimento de Bernouilli de tres pruebas y sea E el espacio muestral correspondiente.

Sean A y B los posibles resultados de cada prueba y designemos por $p(A) = p$ y $p(B) = q$.

Se tiene:

$$E = \{(A, A, A), (A, A, B), (A, B, A), (B, A, A), (A, B, B), (B, A, B), (B, B, A), (B, B, B)\}$$

Sea $X: E \longrightarrow \mathbb{R}$ la V.A. que nos da el número de veces que ocurre el suceso A. Se tiene que $\text{Im}(X) = \{0, 1, 2, 3\}$.

La función de probabilidad de X es la función:

$$\text{Im}(X) \xrightarrow{p} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow p(x) = p[X = x]$$

Calculemos $p\ [X = 0], p[X = 1], p[X = 2], p[X = 3]$.

$$[X = 0] = \{(B, B, B)\} \Rightarrow p[X = 0] = p(B, B, B)$$

Como en un experimento de Bernouilli los resultados de las pruebas son independientes:

$$p(B, B, B) = p(B) \cdot p(B) \cdot p(B) = q \cdot q \cdot q = q^3$$

$$[X = 1] = \{(A, B, B), (B, A, B), (B, B, A)\} \Rightarrow p[X = 1] =$$

$$= p(A, B, B) + p(B, A, B) + p(B, B, A) \Rightarrow p[X = 1] =$$

$$= p(A)p(B)p(B) + p(B)p(A)p(B) + p(B) \cdot p(B) \cdot p(A) =$$

$$= pq^2 + pq^2 + pq^2 = 3pq^2$$

Obsérvese que las probabilidades de cada suceso elemental de los que componen el suceso $[X = 1]$ son iguales.

$$[X = 2] = \{(A, A, B), (A, B, A), (B, A, A)\}$$

Procediendo de igual modo se obtiene: $p[X = 2] = 3p^2q$

$$[X = 3] = \{(A, A, A)\} \Rightarrow p[X = 3] = p(A, A, A) =$$

$$= p(A) \cdot p(A) \cdot p(A) = p \cdot p \cdot p = p^3$$

Por tanto, la función de probabilidad de X viene dada por

X	0	1	2	3
$p(X)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

Consideremos el suceso $[X = 1]$. Sea $\{1.^o, 2.^o, 3.^o\}$ el conjunto que representa las tres pruebas del experimento de Bernouilli. El suceso A lo podemos obtener en la 1.ª prueba ($\{1.^a\}$), en la 2.ª ($\{2.^a\}$) o en la 3.ª ($\{3.^a\}$). Por tanto, A lo podemos obtener exactamente una vez de $\binom{3}{1}$ formas diferentes. Obsérvese que cada forma de obtener una vez A es un subconjunto unitario del conjunto $\{1.^a, 2.^a, 3.^a\}$.

Podemos obtener A exactamente dos veces: en la 1.ª y 2.ª prueba ($\{1.^a, 2.^a\}$), en la 1.ª y 3.ª ($\{1.^a, 3.^a\}$) y en la 2.ª y 3.ª ($\{2.^a, 3.^a\}$). Por lo tanto, A podemos obtenerlo dos veces de $\binom{3}{2}$ formas diferentes.

El suceso $[X = 3]$ sólo se puede realizar de una forma. Lo expresamos: $\binom{3}{3}$. Análogamente, el suceso $[X = 0]$ sólo se puede realizar de una forma. Lo expresamos: $\binom{3}{0}$

Como todos los sucesos elementales de cada suceso $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$, $[X = 3]$ tienen la misma probabilidad, la función de probabilidad de X la podemos expresar:

X	0	1	2	3
$p(X)$	$\binom{3}{0} p^0q^3$	$\binom{3}{1} p^1q^2$	$\binom{3}{2} p^2q$	$\binom{3}{2} p^3q^0$

Observemos que estos resultados coinciden con los hallados inicialmente.

La fórmula de la función de probabilidad de X viene dada por

$$p[X = x] = \binom{3}{x} p^x\, q^{3-x},\ x = 0, 1, 2, 3$$

2.2. Consideremos un experimento de Bernouilli de n pruebas y sea X = número de veces que ocurre A.

Calculemos ahora la función de probabilidad de X.

Sea $x \in \{0, 1, 2, \ldots n\}$. Los sucesos elementales que constituyen el suceso $[X = x]$ son agrupaciones de n letras, donde la letra A aparece x veces, y la letra B, $n-x$ veces. La probabilidad de un suceso elemental de este tipo es: $p^x\, q^{n-x}$

5. Si X es la V.A. que nos da el número de veces que ocurre A en un experimento de Bernouilli de cuatro pruebas, calcula la función de probabilidad de X.

6. Si X es la V.A. que nos indica el número de veces que ocurre A en un experimento de Bernouilli de cuatro pruebas, razona el número de sucesos elementales que tienen los siguientes sucesos:

$[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$, $[X = 3]$, $[X = 4]$

Si indicamos por $\{1.^a, 2.^a, \ldots n.^a\}$ el conjunto de las pruebas, uno de los subconjuntos de x elementos representa las x pruebas donde hemos obtenido A. Por tanto, A podemos obnerlo x veces en las n pruebas de $\binom{n}{x}$ formas; es decir: de tantas formas como subconjuntos de x elementos tiene el conjunto $\{1.^a, 2.^a, \ldots n^a\}$.

En consecuencia:

$$p[X = x] = p^x q^{n-x} + p^x q^{n-x} + \overset{\binom{n}{x}}{\ldots} + p^x q^{n-x} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}.$$

La función de probabilidad de X viene dada por

$$\{\mathbf{0, 1, 2, \ldots n}\} \xrightarrow{\mathbf{p}} \mathbb{R}$$

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{p(x) = p[X = x]} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{x}} \mathbf{p^x q^{n-x}}$$

que es la fórmula de la probabilidad *binomial* o de Bernouilli.

Nota: El nombre de binomial es debido a que la expresión $\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ es un término del desarrollo por el binomio de Newton de $(p + q)^n$.

La función de probabilidad encontrada para la variable aleatoria X es efectivamente una función de probabilidad, ya que verifica:

a) $p[X = x] \geqslant 0, \forall\ x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, dado que $p, q \geqslant 0$

b) $p[X = 0] + p[X = 1] + \ldots + p[X = n] = 1$, pues

$$\binom{n}{0} p^0 q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} p^{n-1} q + \binom{n}{n} p^n q^0 =$$

$$= (p + q)^n = 1^n = 1$$

Ejemplos:

- ¿Cuál es la probabilidad de que una familia con seis hijos tenga dos hijos varones, suponiendo que las probabilidades de que nazca niño o niña son iguales?

  Hemos visto que los descendientes de una pareja constituyen un ejemplo de experimento de Bernouilli.

  Si llamamos A al suceso consistente en que un descendiente sea niño, y B que sea niña, $p(A) = p(B) = 1/2$, ya que $p(A) + p(B) = 1$. Si X representa las veces que ocurre A, la probabilidad pedida es:

$$p[X = 2] = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6!}{4!\,2!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{2^6} = \frac{15}{64}$$

- Supongamos un experimento de Bernouilli de siete pruebas y que la probabilidad de obtener A en una prueba es 0'3. ¿Cuál es la probabilidad de obtener A seis veces?

  Se tiene que $p(B) = 1 - p(A) = 1 - 0'3 = 0'7$

$$p[X = 6] = \binom{7}{6} (0'3)^6 (0'7)^1 = \frac{7!}{6!\,1!} (0'3)^6 \cdot (0'7)^1 = 7\,(0'3)^6 \cdot 0'7$$

2.3. La media, varianza y desviación típica de la variable aleatoria X, que expresa el número de veces que ocurre el suceso A en un experimento de Bernouilli de n pruebas, vienen definidas por las expresiones:

$$\mathbf{E(X) = np} \qquad \mathbf{Var(X) = npq} \qquad \mathbf{dt(X) = \sqrt{npq}}$$

donde

$$\mathbf{p(A) = p,\ p(B) = 1 - p = q}$$

Ejemplo:

- ¿Cuál es la media de hijos varones de una familia de seis hijos? ¿Y la desviación típica?

  Suponiendo iguales las probabilidades de que un determinado hijo de una pareja sea hombre o mujer y X el número de hijos varones, lo que nos pide el problema es $E(X) = np = 6 \cdot 1/2 = 3$

$$\mathrm{dt}(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{6 \cdot 1/2 \cdot 1/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

2.4. La función de distribución de la variable aleatoria X que denota el número de veces que ocurre A en un experimento de Bernouilli es:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$
$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow F(x) = p[X \leqslant x]$$

Siendo x un número real cualquiera; si k es el mayor entero menor o igual que x, se obtiene:

$$F(x) = p[X \leqslant x] = \binom{n}{0} p^0 q^n + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \ldots + \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

k es la parte entera de x que se simboliza $[x]$. Así:

$$\mathbf{F(x) = \sum_{i=0}^{[x]} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}}$$

es la fórmula de la distribución binomial.

7. Considera un experimento de Bernouilli de diez pruebas. Si $p(A) = 0{,}2$ y X es la V.A. que indica el número de veces que ocurre A, escribe la función de probabilidad de X. Calcula: $p[X = 0]$, $p[X = 2]$, $p[X = 10]$.

8. ¿Cuál es la probabilidad de obtener seis bolas blancas en diez extracciones (con devolución) de una urna que contiene cinco bolas blancas y tres negras? ¿Y la de obtener cuatro bolas negras?

9. Calcula la media de hijos varones que tiene una familia de ocho hijos.

10. Si una máquina produce un tornillo defectuoso con probabilidad 0'1, calcula la media de tornillos defectuosos que saldrán en un lote de cien.

Ejemplos:

- ¿Cuál es la probabilidad de que una familia de seis hijos tenga como máximo cuatro hijos varones?

Si X es el número de hijos varones, lo que nos pregunta el problema es:

$$F(4) = p[X \leqslant 4] = \sum_{i=0}^{[4]} \binom{6}{i} p^i q^{6-i} = \sum_{i=0}^{4} \binom{6}{i} p^i q^{6-i}$$

Suponemos como antes $p = q = 1/2$

$$F(4) = \sum_{i=0}^{4} \binom{6}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{6-i} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left[\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4}\right] =$$

$$= 57 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow F(4) = \frac{57}{64}$$

Observa que también

$$p[X \leqslant 4] = 1 - p[X > 4] = 1 - \left(p[X = 5] + p[X = 6]\right) =$$

$$= 1 - \left(\binom{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \binom{6}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^0\right) = \frac{57}{64}$$

- Consideremos un experimento de Bernouilli de cinco pruebas, donde $p(A) = 0'2$. Si F denota la función de distribución, calculemos $F(2'5)$ y $F(3)$.

$$F(2'5) = \sum_{i=0}^{[2'5]} \binom{5}{i} (0'2)^i \cdot (0'8)^{5-i} = \sum_{i=0}^{2} \binom{5}{2} (0'2)^i (0'8)^{5-i} =$$

$$= \binom{5}{0} (0'2)^0 (0'8)^5 + \binom{5}{1} (0'2)^1 (0'8)^4 + \binom{5}{2} (0'2)^2 (0'8)^3 =$$

$$= 0'3277 + 0'4096 + 0'4096 + 0'2048 = 0'9421$$

Observa que $F(2'5) = F(2)$. Por otra parte:

$$F(3) = \sum_{i=0}^{[3]} \binom{5}{i} (0'2)^i (0'8)^{5-i} = \sum_{i=0}^{3} \binom{5}{i} (0'2)^i (0'8)^{5-i} =$$

$$= \binom{5}{0} (0'2)^0 (0'8)^5 + \binom{5}{1} (0'2)^1 (0'8)^4 +$$

$$+ \binom{5}{2} (0'2)^2 (0'8)^3 + \binom{5}{3} (0'2)^3 (0'8)^2 =$$

$$= 0'3277 + 0'4096 + 0'2048 + 0'0512 = 0'9933$$

También se puede obtener este resultado consultando la tabla de la distribución binomial del final del libro. En dicha tabla aparecen destacados los cuatro sumandos anteriores.

11. Dado un experimento de Bernouilli de quince pruebas, donde $p(A) = 1/3$, calcula $E(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $dt(X)$, siendo X la V.A. que indica el número de veces que ocurre A en el experimento.

12. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia con siete hijos tenga:

a) exactamente cuatro niños?

b) más de cuatro niños?

c) menos de cuatro niños?

d) al menos dos niñas?

13. Si una maquina produce un tornillo defectuoso con una probabilidad de 0'1, de cinco tornillos elegidos al azar se pide la probabilidad de encontrar:

a) tres defectuosos,

b) menos de tres defectuosos,

c) al menos uno defectuoso,

d) todos bien hechos.

14. Calcula la probabilidad de que al lanzar un par de dados cuatro veces obtengas:

a) tres veces un seis,

b) ningún seis,

c) menos de tres veces seis,

d) al menos una vez seis.

3 Distribución normal

3.1. Una variable aleatoria X con distribución continua se dice que tiene una distribución normal o que se distribuye normalmente si tiene como función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$$

donde μ y σ^2 son constantes tales que

$$-\infty < \mu < +\infty \quad \text{y} \quad \sigma > 0$$

μ y σ^2 se llaman respectivamente la esperanza y la varianza de la variable aleatoria X.

Si X tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2 se indica $X \in N(\mu, \sigma^2)$.

Hay que probar que esta función verifica las condiciones a) y b) de la definición **6.1.** del tema anterior.

La condición a) es evidente pues la función exponencial toma siempre valores positivos, cualquiera que sea el exponente.

La condición b) dice en nuestro caso que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 1$$

Aquí aparece una integral que no hemos estudiado y es muy complicado demostrar la igualdad. Nosotros la admitiremos.

3.2. La función

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbb{R} \\ \mathbf{x} & \longrightarrow & \mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2\pi\sigma^2}}} \cdot \mathbf{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{array}$$

se llama curva normal o de Gauss.

La función f tiene además las siguientes propiedades:

a) f posee un máximo en el punto $\left(\mu, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)$

En efecto: Igualando a cero la derivada $f'(x)$, resulta:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2} = 0$$

de donde $\dfrac{x-\mu}{\sigma^2} = 0$; $x = \mu$

Observando el signo de $\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2}$ para distintos valores de x obtendremos el signo de $f'(x)$; de este modo se obtiene que: para valores de x anteriores a μ, es $f'(x) > 0$ y en consecuencia f es creciente; y para valores de x situados a la derecha de μ, es $f'(x) < 0$ y f es decreciente, por consiguiente f presenta un máximo en $x = \mu$, ya que pasa de ser creciente a ser decreciente.

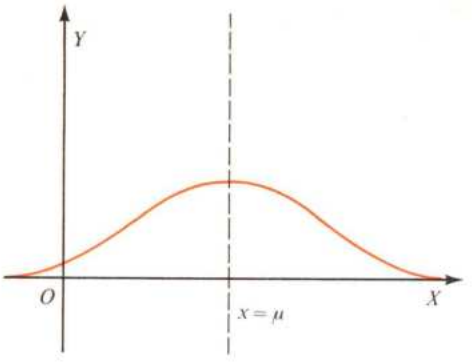
b) El eje OX es una asíntota de la función f, ya que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

c) Por ser $f(\mu - \epsilon) = f(\mu + \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}}$ resulta que la gráfica de f es simétrica respecto a la recta $x = \mu$

d) Haciendo $x = 0$ se obtiene el punto de intersección con el eje OY, que es $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$

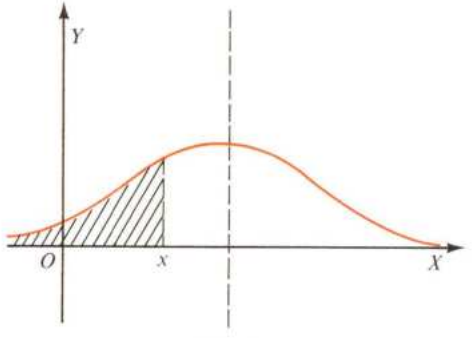
El estudio anterior permite representar la función f (Fig. 1). Debido a la forma de campana es conocida también con el nombre de Campana de Gauss.



(Fig. 1)

3.3. Si X es una V.A. normal con media μ y varianza σ^2, y $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ es su función de densidad, X puede tomar cualquier valor del intervalo $(-\infty + \infty)$. Para todo x, $p[X \leqslant x]$ viene dada por el área que encierra la curva normal con el eje OX en el intervalo $[-\infty, x]$ (Fig. 2). Esta área la simbolizamos por

$$p[X \leqslant x] = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



(Fig. 2)

Así, la función de distribución normal con media μ y varianza σ^2 es la definida por:

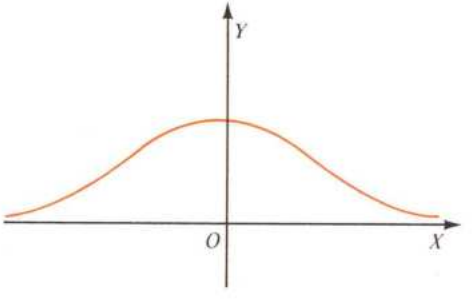
$$\mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

3.4. Si $Z \in N(0, 1)$, es decir, si Z es una V.A. con media 0 y varianza 1, entonces tiene por función de densidad

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2\,x^2}, \quad -\infty\, x < +\infty$$

Esta función se llama *curva normal tipificada* y tiene un máximo en $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$, es simétrica respecto al eje OY y tiene al eje OX como asíntota horizontal (Fig. 3).



(Fig. 3)

15. Dibuja gráficas de la curva de Gauss para distintos valores de μ y σ^2 y compáralas.

La función

$$\mathbb{R} \xrightarrow{F_1} \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2x^2}$$

donde $\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2x^2}$ indica el área que encierra $f_1(x)$ con el eje OX en el intervalo $[-\infty\ x]$ (Fig. 4); es la función de distribución de Z llamada *distribución normal tipificada.*

Los valores que toma F_1 se encuentran tabulados en la última tabla del libro.

Ejemplos:

- Si $F_1(x)$ es la distribución normal tipificada, calcularemos mediante la tabla el valor $F_1(1'95)$. Este valor viene dado directamente sin más que observar en la tabla la fila correspondiente a 1'9, columna de 0'05.

  Se lee: $F_1(1'95) = 0'9744$ (Fig. 5)

  Este es el valor de $p[Z \leqslant 1'95]$

- Calculemos $p[0'5 \leqslant Z \leqslant 1'5]$. Este valor vendrá dado por el área que encierre la curva $f_1(x)$ con el eje OX entre las ordenadas de ecuaciones $x = 0'5$, $x = 1'5$ (Fig. 6).

  Observa que este área es la diferencia entre el área que encierra $f_1(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1'5)$ y el área que encierra $f_1(x)$ en el intervalo $(-\infty, 0'5)$.

  Así:

  $$p[0'5 \leqslant Z \leqslant 1'5] = F_1(1'5) - F_1(0'5)$$

  $F_1(1'5) = 0'9332$, sin más que mirar en la fila correspondiente a 1'5, columna del 0'00, de la tabla de la normal tipificada.

  Análogamente se encuentra $F_1(0'5) = 0'6915$. Por tanto,

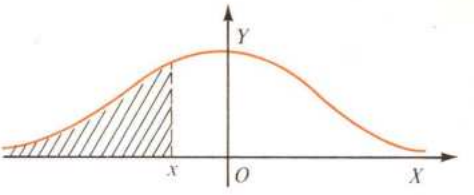
  $$p[0'5 \leqslant Z \leqslant 1'5] = 0'9332 - 0'6915 = 0'2417.$$

- Calculemos $p[Z \leqslant -0'55]$. Se observa en la tabla de la distribución normal tipificada que ésta no nos da valores de áreas correspondientes a abscisas negativas. Para calcular estas áreas nos apoyamos en la simetría de $f_1(x)$ respecto al eje OY.

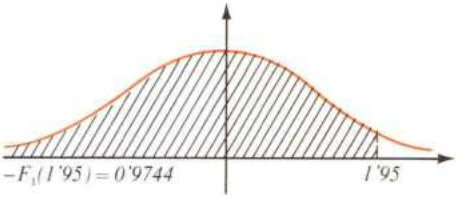
  Así, el área cuyo valor es $p[Z \leqslant 0'55]$ es igual al área que encierra $f_1(x)$ con el eje OX en el intervalo $[0'55, +\infty]$; esta última, a su vez, es igual al área total que encierra $f_1(x)$ menos el área que encierra en el intervalo $[-\infty, 0'55]$ (Fig. 7).

  Por tanto:

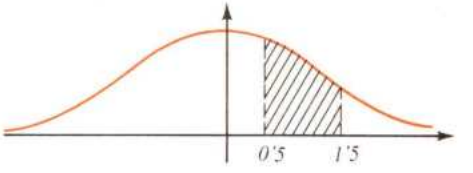
  $$p[Z \leqslant -0'55] = 1 - p[Z \leqslant 0'55] = 1 - 0'7088 = 0'2912$$



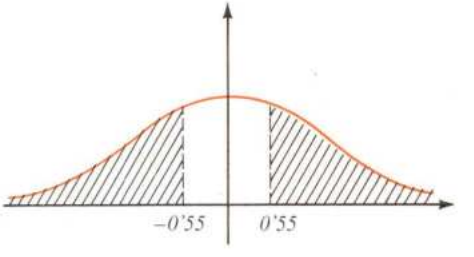
(Fig. 4)



(Fig. 5)



(Fig. 6)



(Fig. 7)

16. Representa, justificadamente, la curva normal tipificada $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2x^2}$

17. Calcula el área que encierra la curva

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2x^2}$$

a) entre las abscisas $x = 2$, $x = 2'5$,

b) entre las abscisas $x = -2'5$, $x = 2$,

c) a la izquierda de 0'12,

d) a la derecha de 0'62.

3.5. Sea $X \in N(\mu, \sigma^2)$. La variable aleatoria $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ se dice la tipificada de X. Se puede probar que Z tiene por media 0 y por varianza 1.

3.6. Sea $X \in N(\mu, \sigma^2)$ y $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ su función de distribución. Sea $F_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la distribución normal de la variable tipificada; entonces se verifica:

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ F(x) = F_1\left(\frac{X-\mu}{\sigma^2}\right)$$

En efecto: De la igualdad entre sucesos

$$[X \leqslant x] = \left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right] \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

se sigue que

$$F(x) = p[X \leqslant x] = p\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right] = p\left[Z \leqslant \frac{x-\mu}{\sigma}\right] = F_1\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right).$$

Este resultado nos permite conectar áreas que encierran una curva normal cualquiera con áreas determinadas por la curva normal tipificada. Por tanto, mediante la tabla del final del libro podemos calcular cualquier probabilidad definida mediante una curva normal cualesquiera que sean los valores de μ y σ^2.

Como consecuencia de esta propiedad se tiene:

$$p[x_1 \leqslant X \leqslant x_2] = p\left[\frac{x_1-\mu}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right], \text{ si } X \in N(\mu, \sigma^2)$$

Ejemplos:

- Sea $X \in N(3,4)$. En este caso $\mu = 3$, $\sigma^2 = 4$.

  Calculemos $p[X \leqslant 2]$, $p[1 \leqslant X < 4]$

$$p[X \leqslant 2] = p\left[Z \leqslant \frac{2-3}{2}\right] = p[Z \leqslant -0'5] = 1 - p[Z \leqslant 0'5] \Rightarrow$$

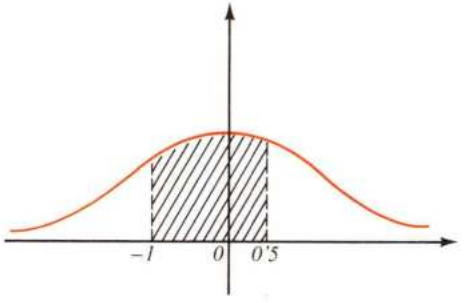
$$\Rightarrow p[X \leqslant 2] = 1 - F_1(0'5) = 1 - 0'6915 = 0'3085$$

  En el otro caso:

$$p[1 \leqslant X \leqslant 4] = p\left[\frac{1-3}{2} \leqslant Z \leqslant \frac{4-3}{2}\right] = p[-1 \leqslant Z \leqslant 0'5] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p[-1 \leqslant Z \leqslant 0'5] = F_1(0'5) - F_1(-1) = F_1(0'5) - [1 - F_1(1)] =$$

$$= F_1(0'5) + F_1(1) - 1 = 0'6915 + 0'8413 - 1 = 0'5328 \text{ (Fig. 8)}$$



(Fig. 8)

18. Sea $Z \in N(0,1)$. Calcula:

a) $p[Z \leqslant 1'5]$

b) $p[1'5 \leqslant Z \leqslant 1'6]$

c) $p[Z \geqslant 2'5]$

d) $p[Z \leqslant -1'70]$

19. Si $X \in N(10,4)$, calcula:

a) $p[8 \leqslant X \leqslant 12]$

b) $p[X \geqslant 11]$

c) $p[X \leqslant 7]$

20. Si X es una V.A. con distribución normal de media μ y varianza σ^2, calcula:

a) $p[\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma]$

b) $p[\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma]$

c) $p[\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma]$

• La media de los pesos de los habitantes de una población es 65 kg, y la desviación típica, 6 kg.

Sabiendo que los pesos se distribuyen normalmente, vamos a calcular la probabilidad de que un individuo pese:

a) a lo sumo 65 kg,

b) entre 60 y 75 kg, ambos inclusive,

c) 75 o más de 75 kg.

Sea X la V.A. que denota el peso de un individuo. Como la media y desviación típica de X son, respectivamente, 65 kg y 6 kg, se tiene: $X \in N(65,6^2)$

a) $p[X \leqslant 65] = p\left[Z \leqslant \frac{65-65}{6}\right] = p[Z \leqslant 0] = 0'5$ (Fig. 9)

b) Se trata de calcular $p[60 \leqslant X \leqslant 75]$

$$p[60 \leqslant X \leqslant 75] = p\left[\frac{60-65}{6} \leqslant Z \leqslant \frac{75-65}{6}\right] =$$

$$= p\left[-\frac{5}{6} \leqslant Z \leqslant \frac{10}{6}\right] =$$

$$= p[-0'83 \leqslant Z \leqslant 1'66] = F_1(1'66) - F_1(-0'83) =$$

$$= F_1(1'66) - [1 - F_1(0'83)] = F_1(1'66) + F_1(0'83) - 1 =$$

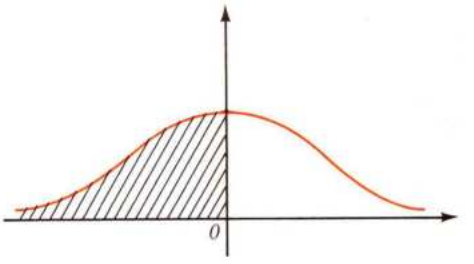
$$= 0'9515 + 0'7967 - 1 = 0'7484.$$

c) $p[X \geqslant 75] = p\left[Z \geqslant \frac{75-65}{6}\right] = p[Z \geqslant 1'66]$

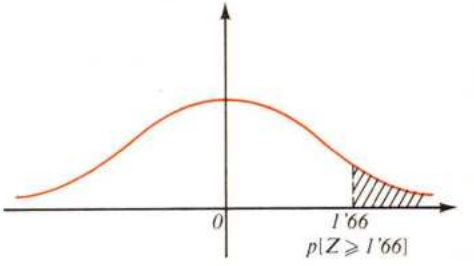
$p[Z \geqslant 1'66]$ es el área que encierra la normal tipificada a la derecha de 1'66 (Fig. 10).

$$p[Z \geqslant 1'66] = 1 - p[Z \leqslant 1'66] = 1 - F_1(1'66) =$$

$$= 1 - 0'9515 = 0'0485$$



(Fig. 9)



(Fig. 10)

21. Si las alturas de los individuos de una población se distribuyen con una media de 170 cm y una varianza de 64 cm, calcula la probabilidad de que un individuo mida:

a) entre 160 y 180 cm, ambos inclusive,

b) al menos 175 cm,

c) a lo sumo 165 cm.

Ejercicios y cuestiones

22. Se lanzan dos dados seis veces. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) obtener igual puntuación tres veces,

b) obtener igual puntuación una vez,

c) obtener igual puntuación al menos cuatro veces,

d) obtener igual puntuación cuatro veces.

23. Referente al problema anterior, si X denota el número de veces que se obtiene igual puntuación en los dos dados en las seis tiradas, calcula $E(X)$, $\mathrm{Var}(X)$, $dt(X)$.

24. Si se lanza una moneda al aire diez veces, calcula la probabilidad de obtener:

a) ninguna cara,

b) como mínimo dos caras,

c) cuatro cruces.

25. Si $F_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función de distribución normal tipificada, calcula: a) $F_1(3)$, b) $F_1(-2)$, c) $F_1(0'03)$, d) $F_1(-1'23)$

26. Supongamos que en un cierto curso las notas de matemáticas se distribuyen normalmente con una media de 6 y una desviación típica de 3. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante

a) apruebe la asignatura?

b) obtenga entre 7 y 8 puntos, ambos inclusive?

c) obtenga 9 o más de 9 puntos?

27. Una población de mazorcas de maíz se distribuye normalmente respecto al carácter longitud con una media $\mu = 25$ cm y una desviación típica $\sigma = 5$. Calcula la probabilidad de que una mazorca mida:

a) entre 22 y 27 cm, ambos inclusive,

b) 27 o más de 27 cm,

c) entre 26 y 30 cm, ambos inclusive,

d) a lo sumo, 20 cm.

28. Si $X \in N(2,1)$, calcula: a) $p[X \leqslant 0]$, b) $p[1 \leqslant X \leqslant 2]$, c) $p[X \geqslant 3]$

Tema 25 DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES

En este tema se estudian las distribuciones bidimensionales discretas. Después de introducir el concepto de función bivariable de probabilidad, se pasa a estudiar el grado de dependencia entre dos variables aleatorias.

En este curso estudiaremos el modo de encontrar una recta (recta regresión) que se aproxime lo más posible a los valores de las mencionadas variables aleatorias.

1 Procesos doblemente aleatorios

1.1. Se denominan experimentos o procesos doblemente aleatorios aquellos que siempre que se realizan dan lugar a dos resultados aleatorios.

Ejemplos:

- El giro de una ruleta es un proceso doblemente aleatorio.

  Un resultado es el color (negro o rojo); otro, el referente a la paridad del número donde cae la bola (par o impar).

  Así, según esto, los resultados que se pueden obtener son:

  "par y negro": (P, N)
  "par y rojo": (P, R)
  "impar y negro": (I, N)
  "impar y rojo": (I, R)

- Un individuo de una determinada población puede ser varón o hembra, y, al mismo tiempo, estar o no estar enfermo. Así, escogido al azar un individuo, se pueden obtener los siguientes resultados:

  "varón y sano": (V, S)
  "varón y enfermo": (V, E)
  "hembra y sana": (H, S)
  "hembra y enferma": (H, E)

  En consecuencia, es un proceso doblemente aleatorio.

- Si en una población estudiamos los caracteres peso y altura de los individuos, realizamos un proceso doblemente aleatorio.

Ejercicios:

1. En el lanzamiento de un par de dados se consideran los puntos obtenidos en cada uno de ellos. ¿Constituye un proceso doblemente aleatorio? ¿Por qué? Escribe el espacio muestral del experimento y define dos variables aleatorias que indiquen los resultados obtenidos con cada dado.

2. Interpreta la extracción de una carta de la baraja española como un proceso doblemente aleatorio y escribe el espacio muestral correspondiente, así como las V.A. que indiquen los resultados obtenidos.

1.2. Un proceso doblemente aleatorio determina dos variables aleatorias, que son las que indican los resultados obtenidos.

Así, en el proceso doblemente aleatorio que se determina por el giro de una ruleta el espacio muestral que determina el proceso es el conjunto:

$$E = \{(P, N), (P, R), (I, N), (I, R)\}$$

Consideremos las variables aleatorias $X, Y: E \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$X(P, N) = 1$; $X(I, N) = 0$; $Y(P, N) = 1$; $Y(I, N) = 1$;
$X(P, R) = 1$; $X(I, R) = 0$; $Y(P, R) = 0$; $Y(I, R) = 0$.

X toma el valor 1 cuando se obtiene par, y 0 si se obtiene impar. Y toma el valor 1 si sale negro, y 0 si sale rojo.

X e Y indican, respectivamente, la paridad y el color del resultado obtenido. X e Y son ambas V.A. discretas. Las probabilidades de obtener par e impar son iguales. Análogamente las de obtener rojo y negro. Todas estas probabilidades valen $\frac{1}{2}$.

Observemos que:

$\{(P, N)\} = [X = 1] \cap [Y = 1]$; $\{(I, N)\} = [X = 0] \cap [Y = 1]$;
$\{(P, R)\} = [X = 1] \cap [Y = 0]$; $\{(I, R)\} = [X = 0] \cap [Y = 0]$.

Todos estos sucesos elementales son equiprobables por lo dicho anteriormente, por tanto:

$$p([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{4} \quad ; \quad p([X = 0] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{4}$$

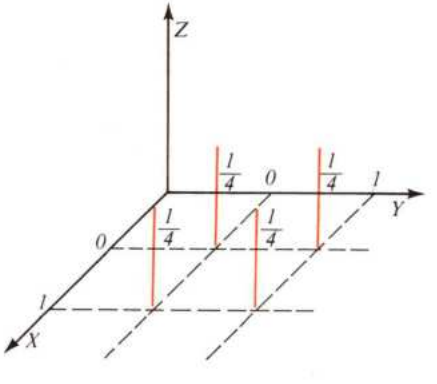
$$p([X = 1] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{4} \quad ; \quad p([X = 0] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{4}$$

Estas probabilidades se disponen según la tabla de la figura 1.

Y \ X	0	1
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4

(Fig. 1)

Estos son los valores de la función de *probabilidad conjunta* o *función bivariable de probabilidad* de las variables aleatorias X e Y. Para representar la función definida por la tabla anterior se trazan tres ejes, x, y, z, que se cortan en un punto formando ángulo recto dos a dos. En el eje x se representan los valores que toma la variable aleatoria X (Fig. 2). En el eje y los que toma la variable aleatoria Y. En el punto (x, y) se trata una barra, paralela al eje z, cuya longitud sea proporcional a $p([X = x] \cap [Y = y])$. En el ejemplo particular que nos ocupa, las barras tienen todas la misma longitud.



(Fig. 2)

2 Funciones bivariables discretas de probabilidad

2.1. Sean X e Y dos variables aleatorias discretas definidas sobre un mismo espacio muestral E. Supongamos también una probabilidad p, definida en los sucesos de E.

Sean:

$$\text{Im}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},\ \text{Im}(Y) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

La función

$$\text{Im}(X) \times \text{Im}(Y) \xrightarrow{p} \mathbb{R}$$
$$(x_i, y_j) \longrightarrow p(x_i, y_j) = p([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

se llama *función de probabilidad discreta bivariable* o *función de probabilidad discreta conjunta* de las variables aleatorias X e Y.

Esta función se representa esquemáticamente en el cuadro de la figura 3.

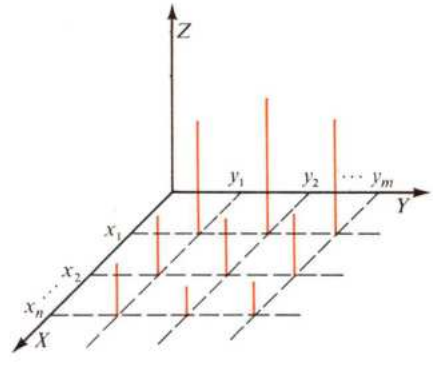
Y \ X	x_1	x_2	...	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	...	$p(x_n, y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	...	$p(x_n, y_2)$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	...	$p(x_n, y_m)$

(Fig. 3)

La representación gráfica de esta función de probabilidad conjunta se realiza, según lo indicado en el párrafo anterior, en la figura 4.

Ejemplo:

- Si elegimos un individuo de una determinada ciudad y averiguamos su sexo y si está o no enfermo, los resultados que se pueden presentar son: $E = \{(V, S), (V, E), (H, S), (H, E)\}$, según hemos indicado en un ejemplo anterior.



(Fig. 4)

3. Dada la función bivariable de probabilidad

Y \ X	1	3	5
2	0'1	0'2	0'05
4	0'4	0'1	0'15

representa un diagrama de barras para dicha función.

4. Sean X e Y dos variables aleatorias discretas cuya función de probabilidad conjunta está dada por el siguiente cuadro:

Y \ X	x_1	x_2	...	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	...	$p(x_n, y_1)$
.				
.				
.				
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	...	$p(x_n, y_m)$

Demuestra:

a) $p[X = x_i] = p(x_i, y_1) + p(x_i, y_2) + \ldots + p(x_i, y_m)\ \forall_i = 1 \ldots n.$

b) $p[Y = y_j] = p(x_1, y_j) + p(x_2, y_j) + \ldots + p(x_n, y_j)\ \forall_j = 1 \ldots m.$

Definimos dos variables aleatorias $X, Y: E \longrightarrow \mathbb{R}$ de la manera siguiente:

$$X(V,S) = 1 \quad ; \quad Y(V,S) = 1$$
$$X(V,E) = 1 \quad ; \quad Y(V,E) = 0$$
$$X(H,S) = 0 \quad ; \quad Y(H,S) = 1$$
$$X(H,E) = 0 \quad ; \quad Y(H,E) = 0$$

X indica el sexo del individuo e Y su estado de salud. Supongamos que las probabilidades de que un individuo elegido al azar sea varón o hembra sean iguales $\left(p(V) = p(H) = \frac{1}{2}\right)$ y que la probabilidad de que esté enfermo (independientemente del sexo) sea 0'1, $(p(E) = 0'1, p(S) = 0'9)$

Calcularemos la función de probabilidad conjunta de X e Y.

Se tiene: $\mathrm{Im}(X) = \{0, 1\}$; $\mathrm{Im}(Y) = \{0, 1\}$

$\mathrm{Im}(X) \times \mathrm{Im}(Y) \xrightarrow{p} \mathbb{R}$

$$(0,0) \longrightarrow p(0,0) = p\left([X = 0] \cap [Y = 0]\right) = \frac{1}{2} \cdot 0'1 = 0'05$$

$$(0,1) \longrightarrow p(0,1) = p\left([X = 0] \cap [Y = 1]\right) = \frac{1}{2} \cdot 0'9 = 0'45$$

$$(1,0) \longrightarrow p(1,0) = p\left([X = 1] \cap [Y = 0]\right) = \frac{1}{2} \cdot 0'1 = 0'05$$

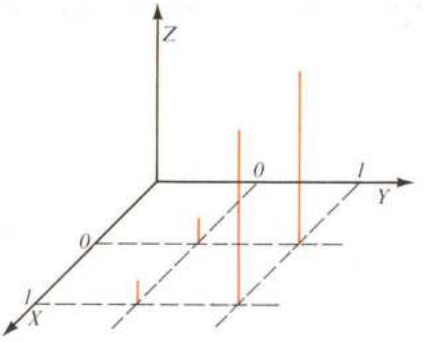
$$(1,1) \longrightarrow p(1,1) = p\left([X = 1] \cap [Y = 1]\right) = \frac{2}{2} \cdot 0'9 = 0'45$$

Hemos supuesto la independencia de la enfermedad respecto al sexo para calcular estas probabilidades.

Esquemáticamente, se escribe:

Y \ X	0	1
0	0'05	0'05
1	0'45	0'45

Su representación viene dada por la figura 5.



(Fig. 5)

5. Dada la función bivariable de probabilidad

Y \ X	1	3	5
2	0'1	0'2	0'05
4	0'4	0'1	0'15

calcula: a) $p[Y = 4]$, b) $p[X = 1]$, c) $p[X < 5]$

6. Mendel observó las siguientes probabilidades para los diversos tipos de guisantes:

lisos y amarillos: $\frac{9}{16}$;

rugosos y amarillos: $\frac{3}{16}$;

lisos y verdes: $\frac{3}{16}$;

rugosos y verdes: $\frac{1}{16}$.

Calcula la probabilidad de que un guisante elegido al azar: a) sea verde, b) sea liso.

3 Regresión lineal

3.1. En ocasiones, entre dos variables existe un cierto grado de dependencia, es decir, una relación. Así, por ejemplo, la estatura y el peso de los individuos, la natalidad y grado de desarrollo de un país, la edad y la propensión a adquirir una determinada enfermedad, etc.

Lo que nos proponemos es encontrar una función que describa lo mejor posible la relación existente entre dos variables. A ésta se la denomina *ecuación de regresión*, y a su gráfica, *línea de regresión*.

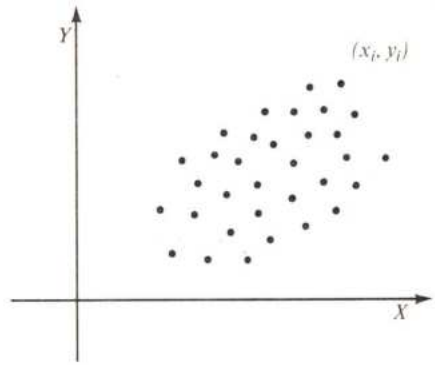
Nos limitaremos a estudiar, en lo que sigue, el caso de la regresión lineal, es decir, trataremos de encontrar una recta que exprese una relación entre dos variables.

3.2. Para fijar ideas, supongamos que X e Y son dos V.A. que nos dan, respectivamente, el peso y la altura de un individuo. Si elegimos al azar n individuos y anotamos sus pesos y estaturas respectivas, obtenemos n pares de datos:

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$$

La primera componente de cada par denota el peso de cada uno de los individuos elegidos; la segunda, su estatura. Cada par (x_i, y_i) se refiere al peso y estatura de un mismo individuo.

Representando cada par (x_i, y_i) en un sistema rectangular de coordenadas, se obtiene un conjunto de n puntos en el plano, denominado *diagrama de dispersión* o *nube de puntos* (Fig. 6). Trataremos de encontrar una línea recta que se "ajuste" lo más posible a estos puntos. Este es el problema de la regresión lineal.



(Fig. 6)

4 Recta de regresión de mínimos cuadrados

4.1. Consideremos dos variables aleatorias X e Y definidas en el mismo espacio muestral E y sean $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset E$.

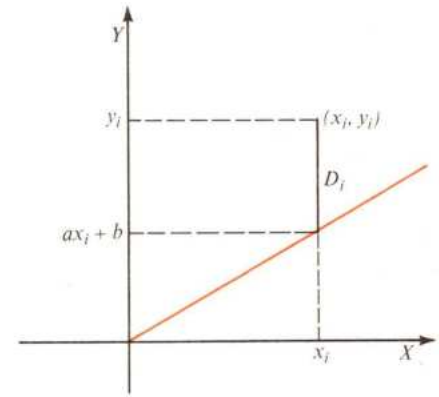
Denotemos por $X(e_i) = x_i$, $Y(e_i) = y_i$, $i = 1, 2 \ldots n$. Obtenemos n pares $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)\}$ de números reales.

Representando éstos en un sistema de coordenadas rectangulares, se obtiene el diagrama de dispersión.

Nuestro propósito es encontrar la recta $y = ax + b$ que "mejor" se ajuste a estos datos.

4.2. Supongamos que la recta buscada es $y = ax + b$. Para cada valor x_i, la correspondiente ordenada en la recta será $ax_i + b$. La diferencia $D_i = y_i - (ax_i + b)$ (Fig. 7) se denomina desviación o error. Este puede ser positivo, negativo o nulo.

Evidentemente, $D_i = 0 \Leftrightarrow y_i = ax_i + b \Leftrightarrow (x_i, y_i)$ pertenece a la recta.



(Fig. 7)

Con los puntos $\{(x_1, y_1),..., (x_n, y_n)\}$ se obtienen n desviaciones:

$$D_1 = y_1 - (ax_1 + b)$$
$$D_2 = y_2 - (ax_2 + b) \qquad \text{(Fig. 8)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D_n = y_n - (ax_n + b)$$

Intuitivamente se ve que la recta estará mejor ajustada cuanto más próximos estén de ella los puntos, es decir, cuanto más pequeñas sean las desviaciones en valor absoluto.

Consideremos la expresión: $D = D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_n^2$

Observa que:

$D = 0 \Leftrightarrow [D_i^2 = 0, \forall_i] \Leftrightarrow [D_i = 0, \forall_i] \Leftrightarrow$ los puntos $(x_i, y_i)\ \forall_i$ están en la recta.

Una medida de la buena aproximación de la recta a los puntos puede venir dada por D.

Cuanto mayor sea D, tanto peor será el ajuste; luego para conseguir una aproximación óptima entre la recta y el conjunto de puntos interesa que D sea lo menor posible.

4.3. *Se llama recta de regresión de mínimos cuadrados de los puntos* $\{(x_1, y_1),..., (x_n, y_n)\}$ *a aquella para la cual la expresión* $D = D_1^2 + D_2^2 + \ldots D_n^2$ *sea mínima.*

Vamos a determinar la recta $y = ax + b$ que verifique esta condición.

Tenemos que encontrar los valores a y b que hagan mínima la expresión

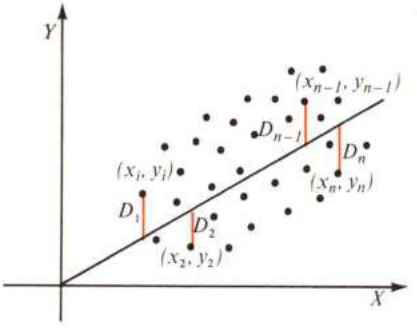
$$D = (y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \ldots + (y_n - ax_n - b)^2$$

Observa que D depende de dos variables, a y b. (Se dice que es una función de dos variables).

Si en esa función fijamos para b el valor del par (a', b'), que hace mínima la D, es claro que la función D, que ya sólo depende de la variable a, tendrá su mínimo en el punto a' y su derivada $\frac{dD}{da}$ debe ser cero en a', es decir $\frac{dD}{da}(a', b') = 0$.

Análogamente, $\frac{dD}{db}(a', b') = 0$.

En consecuencia, los posibles máximos o mínimos de este tipo de funciones se encuentran entre los valores que anulan las derivadas de D respecto de cada una de las variables.



(Fig. 8)

Así tenemos:

$$\frac{dD}{da} = 2(y_1 - ax_1 - b)(-x_1) + 2(y_2 - ax_2 - b)(-x_2) + \ldots +$$

$$+ 2(y_n - ax_n - b)(-x_n) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y_1 - ax_1 - b)x_1 + (y_2 - ax_2 - b)x_2 + \ldots + (y_n - ax_n - b)x_n = 0.$$

Abreviadamente se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (y_i x_i - ax_i^2 - bx_i) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i-1}^{n} y_i x_i = a\sum_{i-1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i-1}^{n} x_i$$

Análogamente:

$$\frac{dD}{db} = -2(y_1 - ax_1 - b) - 2(y_2 - ax_2 - b) - \ldots - 2(y_n - ax_n - b) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y_1 - ax_1 - b) + (y_2 - ax_2 - b) + \ldots + (y_n - ax_n - b) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - nb = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb.$$

Por tanto, los valores a, b que hagan máximo o mínimo D vienen dados por el sistema

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb \end{cases}$$

Como D es una función no acotada (puede tomar valores tan grandes como se quiera), la solución del sistema anterior es la que hace mínimo el valor de D.

Las ecuaciones anteriores se denominan *ecuaciones normales* para la recta de regresión de mínimos cuadrados.

Ejemplo:

- Calcularemos la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos

x_i	2	4	6	8	10
y_i	2	1	3	4	2

Para facilitar la obtención de las ecuaciones normales disponemos los cálculos según la tabla de la figura 9.

La fila de la tabla indicada por Σ corresponde a la suma de las columnas respectivas.

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
	2	2	4	4
	4	1	4	16
	6	3	18	36
	8	4	32	64
	10	2	20	100
Σ	30	12	78	220

(Fig. 9)

Las ecuaciones normales correspondientes a estos datos son:

$$\begin{cases} 78 = a \cdot 220 + b \cdot 30 \\ 12 = a \cdot 30 + b \cdot 5 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, $b = \dfrac{12 - 30a}{5}$

Sustituyendo en la primera, $78 = 220a + \dfrac{12 - 30a}{5} \cdot 30 \Rightarrow$

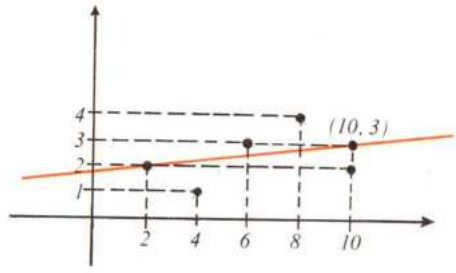
$\Rightarrow 78 = 220a + (12 - 30a) \cdot 6, \quad 40a = 6$, de donde $a = \dfrac{3}{20}$

Por tanto:

$$b = \frac{12 - 30 \cdot \frac{3}{20}}{5} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

La recta de regresión de mínimos cuadrados correspondiente a los datos considerados es $y = \dfrac{3}{20}x + \dfrac{3}{2}$

En la figura 10 se representa ésta, junto con la nube de puntos correspondiente.



(Fig. 10)

4.4. Sean $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$ n pares de valores de dos variables, X e Y.

Consideremos $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $\bar{y} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ las medias aritméticas de los n valores de X e Y, respectivamente.

Al par $(\bar{x}, \bar{y})$ se le llama *centro de gravedad del diagrama de dispersión.*

Ejemplo:

- Consideremos la tabla

x_i	2	4	6	8	10
y_i	2	1	3	4	2

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 6 + 8 + 10}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{2 + 1 + 3 + 4 + 2}{5} = \frac{12}{5}$$

$\left(6, \dfrac{12}{5}\right)$ es el centro de gravedad de los puntos

$$\{(2, 2), (4, 1), (6, 3), (8, 4), (10, 2)\}$$

7. Calcula la recta de regresión de mínimos cuadrados correspondiente a los datos:

x_i	−2	−1	3	6
y_i	7	6	4	1

8. Comprueba que la recta de regresión del ejercicio anterior pasa por el centro de gravedad del diagrama de dispersión.

4.5. Sea $y = ax + b$ la recta de regresión de mínimos cuadrados correspondiente al conjunto $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$

Si $(\bar{x}, \bar{y})$ es el centro de gravedad, se verifica:

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

Es decir: *la recta de regresión de mínimos cuadrados pasa por el centro de gravedad del diagrama de dispersión.*

En efecto:

Consideremos la ecuación normal $\sum_{i=1}^{n} y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i + bn$.

Dividiendo ésta por n: $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = a\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + b \Rightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b.$

Ejemplo:

- La recta de regresión de mínimos cuadrados que corresponde a los datos

x_i	2	4	6	8	10
y_i	2	1	3	4	2

es $y = \dfrac{3}{20}x + \dfrac{3}{2}$.

El centro de gravedad correspondiente a los datos anteriores es $\left(6, \dfrac{12}{5}\right)$.

Como $\dfrac{3}{20} \cdot 6 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{18 + 30}{20} = \dfrac{48}{20} = \dfrac{12}{5}$, resulta que el punto $\left(6, \dfrac{12}{5}\right)$ satisface la ecuación $y = \dfrac{3}{20}x + \dfrac{3}{2}$.

4.6. Sea $y = ax + b$ la recta de regresión de mínimos cuadrados del conjunto $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$

Según **4.5,** ésta se puede escribir en la forma: $y - \bar{y} = a(x - \bar{x})$, que es la expresión de la recta que pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$ y tiene por pendiente a.

4.7. El cálculo de la recta de regresión de mínimos cuadrados es muy laborioso si los datos son números grandes. Vamos a buscar una expresión para dicha recta que nos simplifique su cálculo.

De $\bar{y} = a\bar{x} + b$ se deduce: $b = \bar{y} - a\bar{x}$

Sustituyendo en $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i$

se obtiene: $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (\bar{y} - a\bar{x}) \sum_{i=1}^{n} x_i$

Despejando: $a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y} \sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i}$

Como $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$, resulta:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{y} \cdot n\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x} \cdot n\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{y}\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

Haciendo: $\mathbf{x_i} = x_i - \bar{x}$, $\mathbf{y_i} = y_i - \bar{y}$, $i = 1 \ldots n \Rightarrow x_i = \mathbf{x_i} + \bar{x}$, $y_i = \mathbf{y_i} + \bar{y}$, $i = 1 \ldots n$

y sustituyendo estos valores en la expresión de a resulta

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x_i} + \bar{x})(\mathbf{y_i} + \bar{y}) - n\bar{y}\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x_i} + \bar{x})^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x_i}\mathbf{y_i} + \mathbf{x_i}\bar{y} + \mathbf{y_i}\bar{x} + \bar{x}\bar{y}) - n\bar{y}\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{x_i}^2 + 2\mathbf{x_i}\bar{x} + \bar{x}^2) - n\bar{x}^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i}\mathbf{y_i} + \bar{y} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i} + \bar{x} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y_i} + n\bar{x}\bar{y} - n\bar{y}\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i}^2 + 2\bar{x} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i} + n\bar{x}^2 - n\bar{x}^2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i}\mathbf{y_i} + \bar{y} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i} + \bar{x} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{y_i}}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i}^2 + 2\bar{x} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i}}$$

Teniendo en cuenta que

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i - n \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{y_i} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} y_i - n\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i - n \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = 0$$

nos queda: $a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i}\mathbf{y_i}}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i}^2}$

Entonces, la recta de regresión de mínimos cuadrados correspondiente a los datos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_1) \ldots (x_n, y_n)\}$ se puede escribir:

$$y-\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i y_i}}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i^2}} (x-\bar{x}),$$

donde $\mathbf{x_i} = x_i - \bar{x}$, $\mathbf{y_i} = y_i - \bar{y}$; $\mathrm{i} = 1 \ldots n$.

Ejemplos:

- Calcularemos la recta de regresión de mínimos cuadrados correspondiente a los datos

x_i	2	4	6	8	10
y_i	2	1	3	4	2

según la expresión anterior.

Se tiene: $\bar{x} = 6$, $\bar{y} = \frac{12}{5}$

Ordenaremos los cálculos según la siguiente tabla:

	x_i	y_i	$\mathbf{x_i} = x_i - \bar{x}$	$\mathbf{y_i} = y_i - \bar{y}$	$\mathbf{x_i y_i}$	$\mathbf{x_i^2}$
	2	2	−4	$-\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$	16
	4	1	−2	$-\frac{7}{5}$	$\frac{14}{5}$	4
	6	3	0	$\frac{3}{5}$	0	0
	8	4	2	$\frac{8}{5}$	$\frac{16}{5}$	4
	10	2	4	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{8}{5}$	16
Σ	30	12	0	0	$\frac{30}{5} = 6$	40

Por tanto: $a = \frac{\sum_{i=1}^{5} \mathbf{x_i y_i}}{\sum_{i=1}^{5} \mathbf{x_i^2}} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$

La recta de regresión es $y - \frac{12}{5} = \frac{3}{20}(x-6)$,

que coincide, evidentemente, con la calculada por el primer procedimiento.

La siguiente tabla muestra las alturas y los pesos de 10 individuos:

Altura x_i (cm)	169	166	170	172	167	160	174	171	175	176
Peso y_i (kg)	57	58	65	80	66	55	72	73	71	73

Calcularemos la recta de regresión de mínimos cuadrados correspondiente a estos datos. Se tiene:

$$\bar{x} = \frac{169+166+170+172+167+160+174+171+175+176}{10} = 170$$

$$\bar{y} = \frac{57+58+65+80+66+55+72+73+71+73}{10} = 67$$

Consideremos la siguiente tabla:

	x_i	y_i	$\mathbf{x_i = x_i - \bar{x}}$	$\mathbf{y_i = y_i - \bar{y}}$	$\mathbf{x_i y_i}$	$\mathbf{x_i^2}$
	169	57	−1	−10	10	1
	166	58	−4	−9	36	16
	170	65	0	−2	0	0
	172	80	2	13	26	4
	167	66	−3	−1	3	9
	160	55	−10	−12	120	100
	174	72	4	5	20	16
	171	73	1	6	6	1
	175	71	5	4	20	25
	176	73	6	6	36	36
Σ					277	208

Así:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{10} \mathbf{x_i y_i}}{\sum_{i=1}^{10} \mathbf{x_i^2}} = \frac{277}{208}$$

Por tanto, la recta de regresión es: $y - 67 = \frac{277}{208}(x - 170)$

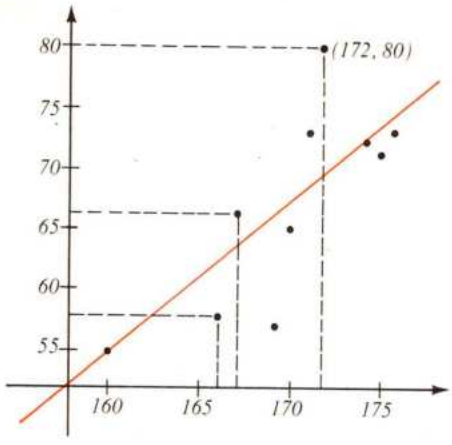
La representación de ésta, así como el diagrama de dispersión, viene dada por la figura 11.

4.8. Muchas veces interesa ajustar un conjunto de datos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)\}$ a una recta del tipo $x = a'y + b'$. La recta de regresión de mínimos cuadrados será en este caso aquella que haga mínima la expresión

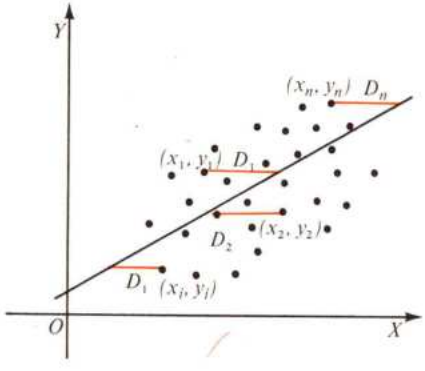
$$D' = D'^2_1 + D'^2_2 + ... + D'^2_n ,$$

donde $D'_i = x_i - (a'y_i + b')$, $i = 1 ... n$ (Fig. 12)

Estos valores $|D'_i|$ son distancias tomadas paralelamente al eje OX de los puntos del diagrama de dispersión a la recta.



(Fig. 11)



(Fig. 12)

9. Los siguientes valores nos muestran las alturas x e y correspondientes a siete padres e hijos primogénitos, respectivamente:

x altura padre (cm)	166	168	171	160	169	175	180
y altura hijo (cm)	170	169	175	160	172	174	177

Se pide:

a) Representa el diagrama de dispersión.

b) Calcula la recta de regresión de mínimos cuadrados.

c) Comprueba que pasa por el centro de gravedad del diagrama de dispersión.

La recta de regresión calculada de esta manera no coincide, en general, con la calculada mediante distancias paralelas a OY. De ahí que cuando tratamos de encontrar la recta de regresión de mínimos cuadrados de una serie de datos en la forma $y = ax + b$ (x variable independiente) nos refiramos a ella como la recta de regresión de "y sobre x".

La recta de regresión de la forma $x = a'y + b'$ (y variable independiente) la denominaremos recta de regresión de "x sobre y".

4.9. De modo análogo a como se ha obtenido la recta de regresión de "y sobre x" se obtiene la recta de regresión de "x sobre y".

Las ecuaciones normales de la recta de regresión de "x sobre y", $x = a'y + b'$ de un conjunto de puntos $\{(x_1, y_1),\ldots (x_n, y_n)\}$, son:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = b'n + a' \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = b' \sum_{i=1}^{n} y_i + a' \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

Esta recta se puede escribir en la forma

$$x - \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i y_i}}{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{y_i^2}} (y - \bar{y}),$$

donde $\mathbf{x_i} = x_i - \bar{x}$, $\mathbf{y_i} = y_i - \bar{y}$, $i = 1 \ldots n$.

Ejemplo:

- Calcularemos la recta de regresión de "x sobre y" correspondiente a los datos del ejemplo anterior, referidos al peso y estatura de diez individuos.

  Consideremos la siguiente ordenación de los datos:

x_i	y_i	$\mathbf{x_i} = x_i - \bar{x}$	$\mathbf{y_i} = y_i - \bar{y}$	$\mathbf{x_i y_i}$	$\mathbf{y_i^2}$
169	57	−1	−10	10	100
166	58	−4	−9	36	81
170	65	0	−2	0	4
172	80	2	13	26	169
167	66	−3	−1	3	1
160	55	−10	−12	120	144
174	72	4	5	20	25
171	73	1	6	6	36
175	71	5	4	20	16
176	73	6	6	36	36
Σ				277	612

10. Calcula la recta de regresión de "x sobre y" correspondiente a los datos del ejercicio anterior.

Por tanto: $a' = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} = \dfrac{277}{612}$

La recta de regresión de "x sobre y" es $x - 170 = \dfrac{277}{612}(y - 67)$

Observa que esta recta no coincide con la de "y sobre x". Las dos se cortan en el centro de gravedad del diagrama de dispersión: (170,67).

4.10. Sean $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$ n pares de valores de dos variables aleatorias, X e Y. Muchas veces nos puede interesar calcular el valor que adquiere y para un valor determinado de x que no figure en los datos recogidos. Esto se conoce con el nombre de *estimación* del valor de y correspondiente a uno de x. Un procedimiento que se sigue para esto es calcular la recta de regresión de mínimos cuadrados de y sobre x correspondiente a los datos dados y calcular mediante ella el valor de y correspondiente al valor que nos interesa de x, sin más que sustituir éste en la ecuación de la recta de regresión.

Si lo que nos interesa es "estimar" el valor de la variable x para un determinado valor de y, se considera la recta de regresión de "x sobre y" y se procede de forma análoga.

Ejemplo:

- Consideremos la tabla de valores

x_i altura (cm)	169	166	170	172	167	160	174	171	175	176
y_i peso (kg)	57	58	65	80	66	55	72	73	71	73

Según la recta de regresión de "y sobre x":

$$y - 67 = \frac{277}{208}(x - 170)$$

el peso estimado correspondiente a un individuo de 180 cm es:

$$y = 67 + \frac{277}{208}(180 - 170) = 67 + \frac{2.770}{208} = 67 + 10'91 = 77'91 \text{ kg}$$

Análogamente, la estatura estimada de un individuo que pese 70 kg, según la recta de regresión de "x sobre y":

$$x - 170 = \frac{277}{612}(y - 67), \text{ es}$$

$$x = 170 + \frac{277}{612}(70 - 67) = 170 + \frac{277}{612} = 170 + 1'35 = 171'35 \text{ cm.}$$

11. Mediante los datos dados en el ejercicio **9.**, estima:

a) la altura del hijo primogénito de un padre que tiene una estatura de 170 cm.

b) la altura que tendrá el padre de familia cuyo hijo primogénito mide 177 cm.

12. Dada la tabla de valores

x_i	1	3	6	7	10	12
y_i	8	6	5	4	3	6

Calcula:

a) La recta de regresión de "y sobre x".

b) La recta de regresión de "x sobre y".

c) Estima un valor para x cuando $y = 0$.

d) Estima un valor para y cuando $x = 15$.

5 Correlación lineal

5.1. La *correlación*, o *grado de relación*, entre dos variables estudia en qué medida una ecuación describe la relación entre dichas variables. Si todos los valores de las variables satisfacen una ecuación, se dice que la correlación es perfecta. En caso contrario, se dice no perfecta. Si la ecuación es la de una recta, entonces la correlación se dice lineal. Si la ecuación no es la de una recta, se dice no lineal.

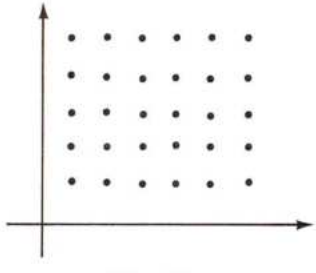
Hay casos en que dos variables no mantienen ninguna relación entre sí. Por ejemplo: los resultados que se obtienen al lanzar dos dados distintos son independientes; se dice entonces que no hay correlación entre ellos.

En general, dos variables no están correlacionadas perfectamente. Nuestro propósito es medir el grado de correlación. Nos restringiremos al estudio de la correlación lineal.

La correlación entre dos variables X e Y se dice positiva si siempre que aumenta el valor de una variable aumenta el de la otra. En caso contrario, se dice que hay correlación negativa.

5.2. Dado un conjunto de pares de datos $\{(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)\}$ correspondientes a n valores de dos variables X e Y se puede calcular la recta de regresión de "y sobre x" o de "x sobre y". Nos interesa saber en qué grado esta recta describe la relación entre X e Y.

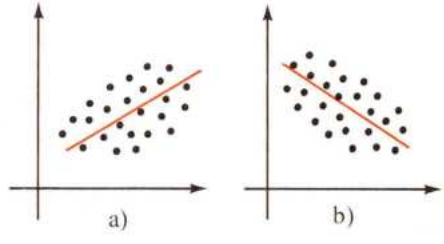
En la figura 13 vemos un caso donde la recta de regresión no describe bien la relación entre las dos variables: no hay correlación.



(Fig. 13)

En la figura 14 observamos dos casos en que la recta de regresión se ajusta bastante bien a los datos.

En la figura 14-a) hay una correlación lineal positiva, y en b), negativa.



(Fig. 14)

6 Coeficiente de correlación lineal

6.1. Consideremos dos variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio muestral. Sean $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ $\{y_1, y_2, \ldots y_n\}$ los valores que toman estas variables en n sucesos elementales del espacio muestral.

Sean $\bar{x}$ e $\bar{y}$ las medias aritméticas respectivas de los valores de x_i e y_i. Sea $\mathbf{x_i} = x_i - \bar{x}$, $\mathbf{y_i} = y_i - \bar{y}$, $i = 1 \ldots n$; entonces, el coeficiente de correlación lineal viene definido por la expresión:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i y_i}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{y_i^2}\right)}}$$

Observa que el signo de r depende del signo de $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i y_i}$

6.2. Si r es el coeficiente de correlación lineal, se verifica: $-1 \leqslant r \leqslant 1$.

En efecto: si $t \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\forall_i = 1 \ldots n,\ (tx_i + y_i)^2 \geqslant 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (tx_i + y_i)^2 \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (t^2 x_i^2 + 2x_i y_i t + y_i^2) \geqslant 0 \Rightarrow t^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geqslant 0.$$

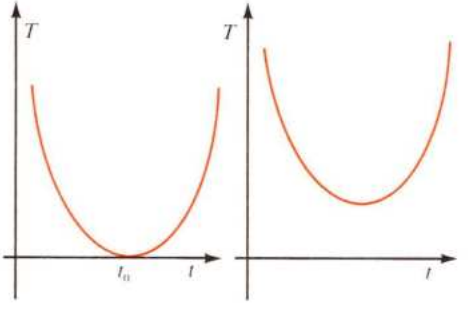
El trinomio de 2.º grado en t

$$T = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) t^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) t + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

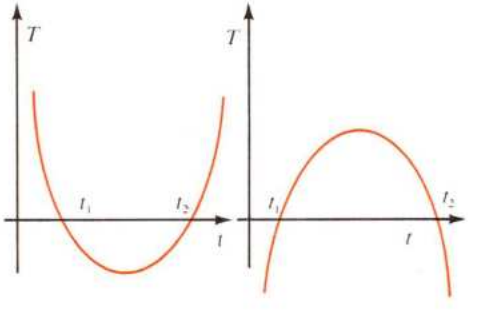
tiene por discriminante

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Dado que T toma sólo valores mayores o iguales que 0, sólo puede tener a lo sumo una raíz real. (La parábola que lo representa no puede cortar al eje Ot más que, a lo sumo, en un solo punto; en caso contrario, tomaría valores por debajo de Ot.) (Ver figura 15).



a) Parábola con un punto de corte en el eje. (Una raíz real.) Parábola sin raíz real.



b) Parábolas con dos puntos de corte con el eje. (Dos raíces reales)

(Fig. 15)

Por tanto:

$$4\left(\sum_1^n \mathbf{x}_i\mathbf{y}_i\right)^2 - 4\left(\sum_1^n \mathbf{x}_i^2\right)\left(\sum_1^n \mathbf{y}_i^2\right) \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_1^n \mathbf{x}_i\mathbf{y}_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_1^n \mathbf{x}_i^2\right)\left(\sum_1^n \mathbf{y}_i^2\right) \Rightarrow r^2 = \frac{\left(\sum_1^n \mathbf{x}_i\mathbf{y}_i\right)^2}{\left(\sum_1^n \mathbf{x}_i^2\right)\left(\sum_1^n \mathbf{y}_i^2\right)} \leqslant 1.$$

En consecuencia: $-1 \leqslant r \leqslant 1$.

6.3. Si $r = 1$, la correlación entre las variables x e y se dice positiva perfecta. Si $r = -1$, la correlación es negativa perfecta.

6.4. Sean $y-\bar{y} = a(x-\bar{x})$, $x-\bar{x} = a'(y-\bar{y})$ las rectas de regresión de mínimos cuadrados correspondientes al conjunto $\{(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)\}$

Se sabe que:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i\mathbf{y}_i}{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^2}, \qquad a' = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i\mathbf{y}_i}{\sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i^2}$$

donde $\mathbf{x}_i = x_i - \bar{x}$, $\mathbf{y}_i = y_i - \bar{y}$, $i = 1 \ldots n$.

Se tiene:

$$a \cdot a' = \frac{\sum_1^n \mathbf{x}_i\mathbf{y}_i}{\sum_1^n \mathbf{x}_i^2} \cdot \frac{\sum_1^n \mathbf{x}_i\mathbf{y}_i}{\sum_1^n \mathbf{y}_i^2} = \frac{\left(\sum_1^n \mathbf{x}_i\mathbf{y}_i\right)^2}{\left(\sum_1^n \mathbf{x}_i^2\right)\left(\sum_1^n \mathbf{y}_i^2\right)} = r^2 \Rightarrow a \cdot a' = r^2$$

6.5. La correlación es perfecta ($r^2 = 1$) si, y sólo si, las dos rectas de regresión coinciden.

En efecto: supongamos $r^2 = 1$

$$r^2 = a \cdot a' = 1 \Rightarrow a' = \frac{1}{a}$$

La recta de regresión de "x sobre y" se puede poner

$$x-\bar{x} = \frac{1}{a}(y-\bar{y}) \Rightarrow y-\bar{y} = a(x-\bar{x}),$$

que coincide con la recta de regresión de "y sobre x".
Por otra parte, si las rectas coinciden:

$$a = \frac{1}{a} \Rightarrow a \cdot a' = 1 \Rightarrow r^2 = 1$$

13. Consideremos el conjunto de puntos: $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)\}$. Si S_x y S_y denotan, respectivamente, las desviaciones típicas de los n valores de x y los n valores de y, demuestra que las rectas de regresión correspondientes a los puntos dados se pueden escribir:

$$y-\bar{y} = \frac{r\,S_y}{S}(x-\bar{x}), \qquad x-\bar{x} = \frac{r\,S_x}{S_y}(y-\bar{y})$$

Ejemplo:

- Calculemos el coeficiente de correlación para los valores

x_i altura cm	169	166	170	172	167	160	174	171	175	176
y_i peso kg	57	58	65	80	66	55	72	73	71	73

Consideremos la siguiente tabla:

x_i	y_i	$\mathbf{x_i = x_i - \bar{x}}$	$\mathbf{y_i = y_i - \bar{y}}$	$\mathbf{x_i y_i}$	$\mathbf{x_i^2}$	$\mathbf{y_i^2}$
169	57	−1	−10	10	1	100
166	58	−4	−9	36	16	81
170	65	0	−2	0	0	4
172	80	2	13	26	4	169
167	66	−3	−1	3	9	1
160	55	−10	−12	120	100	144
174	72	4	5	20	16	25
171	73	1	6	6	1	36
175	71	5	4	20	25	16
176	73	6	6	36	36	36
Σ				277	208	612

Se tiene que

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{10} \mathbf{x_i y_i}}{\sqrt{\left(\sum_1^{10} \mathbf{x_i^2}\right)\left(\sum_1^{10} \mathbf{y_i^2}\right)}} = \frac{277}{\sqrt{208.612}} = \frac{277}{356'78} = 0'77.$$

Hay entre los datos una correlación lineal positiva bastante buena.

14. Si no hay correlación entre n valores de dos variables x e y ($r = 0$), demuestra que las dos rectas de regresión son perpendiculares.

15. Calcula el coeficiente de correlación lineal para los datos del ejercicio **11.** ¿Qué tipo de correlación existe entre x e y?

16. Calcula el coeficiente de correlación para las variables x e y correspondiente a la tabla:

x_i	10	7	22	18	12	11	17
y_i	6	8	10	7	12	5	12

17. La siguiente tabla muestra las puntuaciones obtenidas por ocho alumnos en las partes teórica y práctica de un examen de matemáticas:

Puntuación teórica x	3	8	8	10	4	7	5	6
Puntuación práctica y	2	6	9	10	3	6	4	4

Calcula:

a) La recta de regresión de "x sobre y".

b) La recta de regresión de "y sobre x".

c) El coeficiente de correlación.

Ejercicios y cuestiones

18. Dada la función bivariable de probabilidad

Y \ X	−3	−1	0	1
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

se pide:

a) Su diagrama de barras, b) $p[X = 0]$, c) $p[X \leqslant 0]$, d) $p[Y \geqslant 2]$, e) $p([X = 1] \cap [Y = 2])$

19. Calcula la recta de regresión de mínimos cuadrados de "y sobre x" para los datos

x_i	10	12	14	16
y_i	−1	−3	−5	−7

20. En el ejercicio anterior, estima un valor de y para $x = 15$

21. Dada la tabla

x_i	2	3	8	7	11	20
y_i	0'5	1	2	2'5	3	4

se pide:

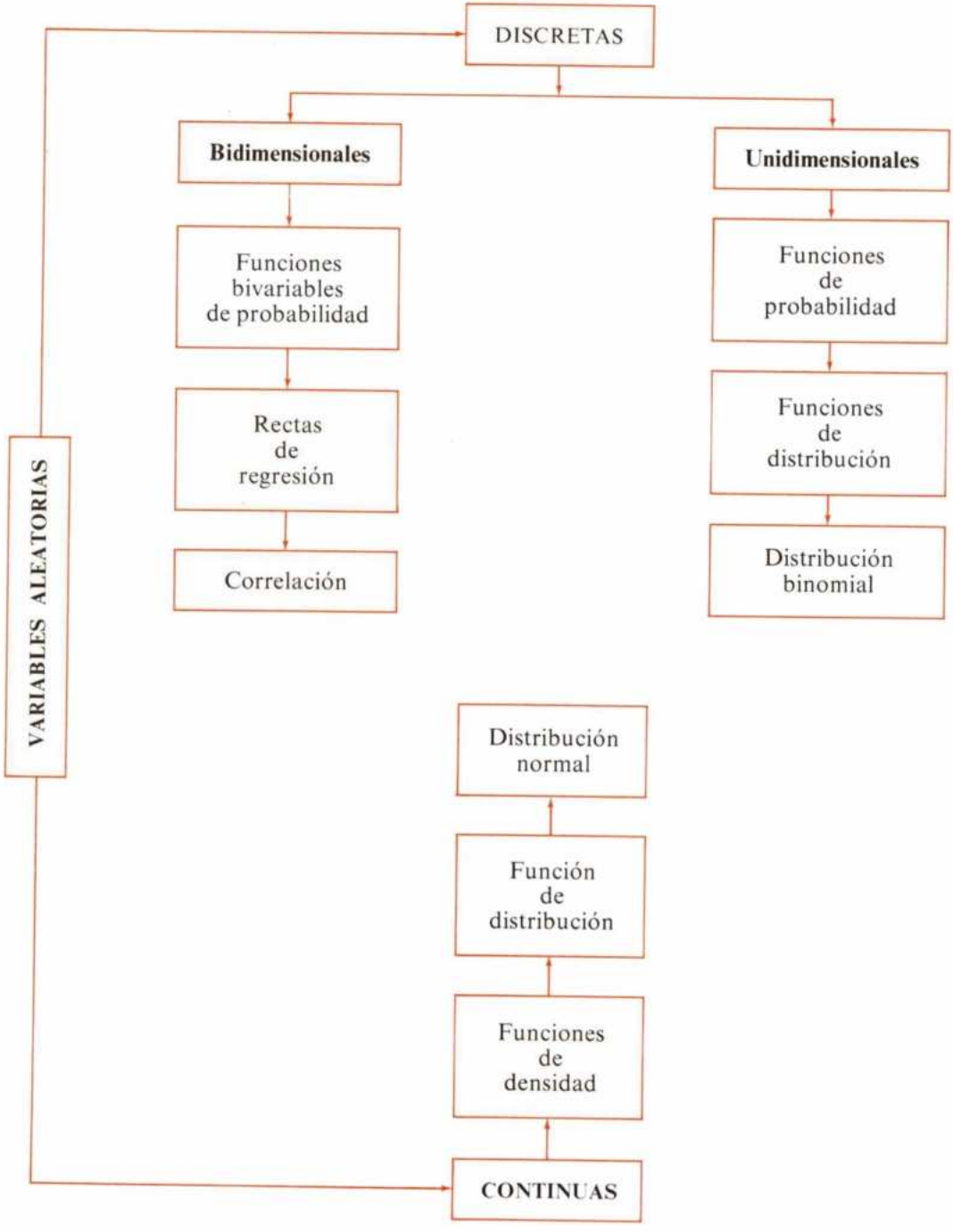
a) El diagrama de dispersión.
b) Recta de regresión de "x sobre y".
c) Recta de regresión de "y sobre x".
d) Estima un valor de y para $x = 5$.
e) Estima un valor de x para $y = 1'5$.
f) El coeficiente de correlación.

22. Calcula el coeficiente de correlación para los datos del ejercicio **19.** ¿Qué tipo de correlación hay?

23. Calcula la recta de regresión de x sobre y para los datos del ejercicio **19** mediante el coeficiente de correlación y la recta de regresión de "y sobre x".

DIAGRAMA ESTRUCTURAL DE LA UNIDAD 7

ESTADISTICA



Complementos y ampliación

En la Unidad 1 ya se estudiaron algunas aplicaciones del producto escalar. Se amplía aquí esta Unidad con otras aplicaciones importantes.

Para la Unidad 2, de trigonometría, se resuelven y proponen algunos ejemplos interesantes de ecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas.

La Unidad 3, de geometría, se complementa con el estudio de algunos lugares geométricos importantes.

Aunque la representación geométrica del producto y cociente de números complejos que se estudia en estos complementos no es esencial, puede ayudar a resolver ciertos problemas.

Como aplicación del cálculo integral a la física, se estudia el movimiento uniformemente acelerado. Finalmente, como complemento de la Unidad de Estadística se estudian los cálculos abreviados de la media y de la desviación típica.

1 Aplicaciones del producto escalar

Unidad 1

Veamos cómo el producto escalar nos conduce a resultados prácticos en el estudio de las propiedades de los cuadriláteros.

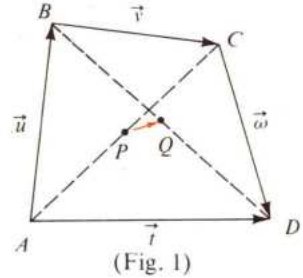
1.1. Vamos a probar que en un cuadrilátero la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales más cuatro veces el cuadrado de la distancia entre sus puntos medios.

Sea $ABCD$ (Fig. 1) un cuadrilátero cualquiera.

Si llamamos $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}]$, $\vec{v} = [\overrightarrow{BC}]$, $\vec{w} = [\overrightarrow{CD}]$ y $\vec{t} = [\overrightarrow{AD}]$, resulta:

$\vec{t} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $[\overrightarrow{AC}] = \vec{u} + \vec{v}$

y $[\overrightarrow{BD}] = \vec{v} + \vec{w}$



(Fig. 1)

En consecuencia:

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + |\vec{t}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|^2 =$$
$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + 2\vec{u}\cdot\vec{w} + 2\vec{v}\cdot\vec{w} =$$
$$= |\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{v} + \vec{w}|^2 + |\vec{w} + \vec{u}|^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + |\vec{w} + \vec{u}|^2$$

Por otra parte, si P y Q son los respectivos puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, el vector $[\overrightarrow{PQ}]$ puede expresarse como

$[\overrightarrow{PQ}] = \vec{t} - \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{w})$; por tanto, $\overline{PQ}^2 = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{w})^2$ y $4\,\overline{PQ}^2 = (\vec{u} + \vec{w})^2$, de donde $|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + |\vec{t}|^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + |\vec{u} + \vec{w}|^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\,\overline{PQ}^2$, o bien

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\,\overline{PQ}^2$$

1.2. Observa que:

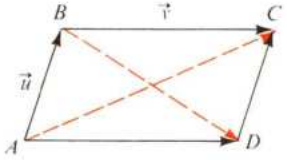
a) Si $P = Q$, entonces $\vec{u} + \vec{w} = 0$, de donde $\vec{u} = -\vec{w}$ y $\vec{t} = \vec{v}$; en consecuencia, $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{BC} = \overline{AD}$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, luego $ABCD$ es un paralelogramo.

b) Si $ABCD$ es un paralelogramo, $\vec{u} = -\vec{w}$; por tanto, $[\overrightarrow{PQ}] = \vec{0}$, de donde $P = Q$.

En resumen: *en un cuadrilátero, la condición necesaria y suficiente para que las diagonales se corten en su punto medio es que sea un paralelogramo.*

1.3. Considera un paralelogramo $ABCD$ (Fig. 2).

Llamando $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}]$ y $\vec{v} = [\overrightarrow{BC}]$ se tiene: $[\overrightarrow{AC}] = \vec{u} + \vec{v}$ y $[\overrightarrow{BD}] = \vec{v} - \vec{u}$; por tanto,



(Fig. 2)

$$\overline{AC}^2 - \overline{BD}^2 = |\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{v} - \vec{u}|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v} = 4|\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v})$$

En consecuencia, $\overline{AC} = \overline{BD}$ si, y sólo si, $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, o, lo que es lo mismo, *las diagonales de un paralelogramo son iguales si, y sólo si, el paralelogramo es un rectángulo.*

1.4. Demuestra que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

1 Ecuaciones y sistemas de ecuaciones trigonométricas

Unidad 2

Veamos algunos ejemplos adicionales de ecuaciones trigonométricas y, a continuación, varios sistemas en los que intervienen razones trigonométricas.

1.1. Calculemos el valor de x en la ecuación $\frac{\operatorname{sen}(x + a)}{\cos a} - \operatorname{tg} a \cos x = 1$, siendo a tal que $\cos a \neq 0$.

Entonces: $\frac{\operatorname{sen}(x + a)}{\cos a} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}\cos x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}(x + a) - \operatorname{sen} a \cos x = \cos a \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} a \cos x = \cos a \Rightarrow \operatorname{sen} x \cos a = \cos a \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos a(\operatorname{sen} x - 1) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$

1.2. Resolvamos en el intervalo $[0, 2\pi]$ la ecuación $\dfrac{\operatorname{sen} 2x \operatorname{cosec} x}{\operatorname{tg} x} = 1 + \cot x \sec x$.

$$\frac{2\operatorname{sen} x \cos x \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = 1 + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \frac{2\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} = 1 + \frac{1}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x = \operatorname{sen} x + 1 \Rightarrow 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{sen} x + 1 \Rightarrow 2(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x + 1$$

Si $1 + \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}$

Si $1 + \operatorname{sen} x \neq 0 \Rightarrow 2(1 - \operatorname{sen} x) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$

1.3. Resolvamos el sistema de ecuaciones trigonométricas

$$\left.\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \\ x + y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}\right\} \text{en el intervalo } [0, \pi] \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1 \\ x = \dfrac{\pi}{2} - y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + \operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos y - \cos\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos y + \operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} + \operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = 1 - \operatorname{sen} y.$$

Llamando $t = \operatorname{sen} y$, resulta: $\sqrt{1 - t^2} = 1 - t$. Elevando al cuadrado:

$$1 - t^2 = 1 + t^2 - 2t \Rightarrow 2t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t^2 - t = 0 \Rightarrow t(t - 1) = 0 \Rightarrow t = 0 \quad \text{ó} \quad t = 1$$

Si $t = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} y = 0 \Rightarrow y = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$. Si $t = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = 0$

1.4. En el intervalo $[0, 2\pi]$ vamos a resolver el sistema $\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = 2 \\ x - y = 60^\circ \end{cases}$

$$\operatorname{sen}(60^\circ + y) = 2\operatorname{sen} y \Rightarrow \operatorname{sen} 60^\circ \cos y + \cos 60^\circ \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen} y \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y + \frac{1}{2}\operatorname{sen} y =$$

$$= 2\operatorname{sen} y \Rightarrow \sqrt{3}\cos y = 3\operatorname{sen} y \Rightarrow \operatorname{tg} y = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = 30^\circ \quad \text{e} \quad y = 210^\circ.$$

Por tanto, si $y = 30^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$ y si $y = 210^\circ \Rightarrow x = 270^\circ$

1.5. Resuelve el siguiente sistema en el intervalo $[0, 2\pi]$: $\begin{cases} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 1 \\ 2x + 2y = \pi \end{cases}$

1.6. En el intervalo $[0, \pi]$, resuelve el sistema $\begin{cases} \cos x \cos y = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ x - y = 30^\circ \end{cases}$

1.7. Halla las soluciones del sistema $\begin{cases} x + y = 120^\circ \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

1 Determinación de algunos lugares geométricos

Unidad 3

En la Unidad 3 hemos hablado del concepto de lugar geométrico; veamos ahora algunos ejemplos adicionales.

1.1. Hallemos el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos (0, 0) y (4, 0) es constante e igual a 25.

Entonces si (x, y) son las coordenadas de un punto de ese lugar geométrico

$$(\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2})^2 + (\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2})^2 = 25$$

Por tanto: $x^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 8x + 16 = 25 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 8x = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x = \frac{9}{2}$$

Se trata de una circunferencia de centro el punto (2, 0) y radio $\sqrt{\frac{17}{2}}$

1.2. Calculemos la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que el producto de sus distancias a los puntos (0, 0) y (0, 1) es constante e igual a 10.

Entonces si (x, y) son las coordenadas de un punto de ese lugar geométrico, se tiene:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\cdot\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2} = 10 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+(y-1)^2} = 10$$

Elevando al cuadrado los dos miembros, resulta:

$$(x^2+y^2)(x^2+(y-1)^2) = 100 \Rightarrow x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2yx^2 - 2y^3 + x^2 + y^2 = 100,$$

ecuación del lugar geométrico dado.

1.3. Calculemos el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la razón de sus distancias a los puntos $(-2, 1)$ y $(1, -2)$ es igual a $\frac{3}{2}$.

Entonces, llamando (x, y) a un punto de ese lugar geométrico, se tiene:

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}}{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(x+2)^2+(y-1)^2}{(x-1)^2+(y+2)^2} = \frac{9}{4}, \text{ de donde:}$$

$$4(x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1) = 9(x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 34y + 44y = -25 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{34}{5}x + \frac{44}{5}y = -5$$

En consecuencia, el lugar geométrico pedido es una circunferencia de centro $\left(\frac{17}{5}, -\frac{22}{5}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{648}}{5}$

1.4. Calcula el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas iguales de una circunferencia.

1 Representación gráfica del producto de números complejos

Sean $z_1 = \rho_1(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$ dos números complejos escritos en forma trigonométrica. Hemos visto en el tema 12 que su producto z viene dado por:

$$z = z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)\big)$$

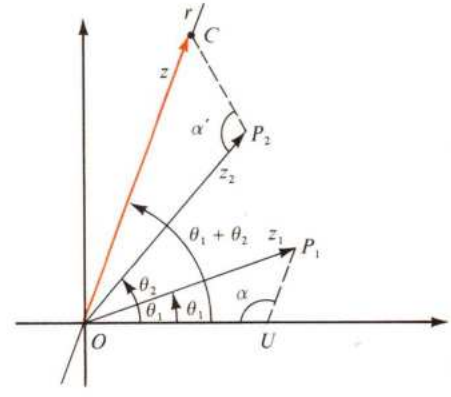
Es decir:

$$|z| = \rho_1\rho_2 = |z_1|\cdot|z_2| \qquad [1]$$

$$\text{Arg}\,(z) = \text{Arg}\,(z_1) + \text{Arg}\,(z_2) \qquad [2]$$

De la primera relación se deduce que $\dfrac{|z|}{\rho_1} = \dfrac{\rho_2}{1}$. Esta proporción, junto con la [2], nos permite obtener gráficamente el producto de dos números complejos de la forma siguiente.

Considera la figura 1. Como el argumento del producto z debe ser $\theta_1 + \theta_2$, el afijo de z ha de estar sobre la recta r. Si se une al afijo de z_1 con el punto unidad U del eje OX, y se construye el triángulo de lado z_2, semejante al formado por O, U y el afijo de z_1 (para lo cual basta construir el ángulo $\alpha' = \alpha$), resulta $\dfrac{\overline{OC}}{|z_1|} = \dfrac{|z_2|}{\overline{OU}}$, y como $\overline{OU} = 1$, se tiene que $\overline{OC} = |z_1||z_2|$, es decir, que el punto C es el afijo del complejo $z = z_1 \cdot z_2$.



(Fig. 1)

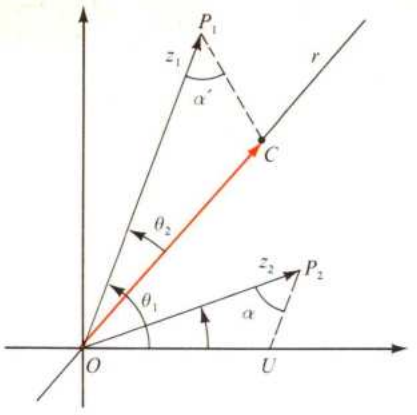
2 Representación gráfica del cociente de números complejos

2.1. Considera los complejos $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$ y $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$.

Has visto en el tema 12 que $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ [1], y que $\text{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2)$.

Para obtener gráficamente el cociente $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ se procede de manera análoga a la del producto.

Considera la figura 2. Como el afijo del cociente z debe ser $\theta_1 - \theta_2$, el afijo de z ha de encontrarse sobre la recta r. Uniendo el afijo de z_2 con el punto unidad U y construyendo el ángulo $\alpha' = \alpha$ sobre $\overline{OP_1}$ se obtienen los triángulos OP_1C y OP_2U, que son semejantes por tener sus ángulos iguales. Se tiene entonces: $\dfrac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_2}} = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OU}}$, es decir, $\dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \overline{OC}$, y por tanto, C es el afijo del cociente $\dfrac{z_1}{z_2}$.

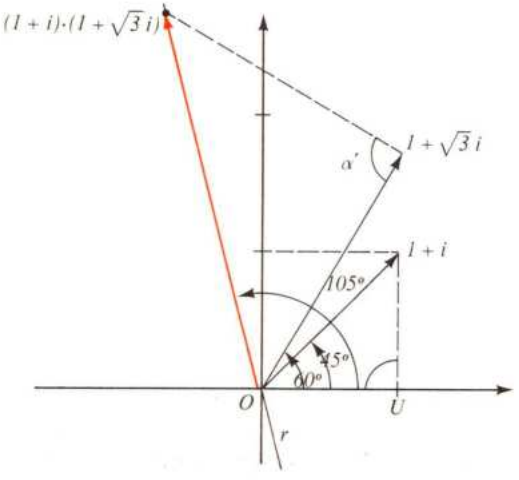


(Fig. 2)

Vamos a construir gráficamente el producto $(1 + i)\,(1 + \sqrt{3}i)$. Escribiendo los complejos en forma trigonométrica, se tiene:

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$$
$$1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$$

Procediendo como se explica en el apartado 1, resulta la siguiente figura:



(Fig. 3)

2.2. Construye gráficamente el producto $(3 + 3i)\,(2 + 2\sqrt{3}i)$.

2.3. Construye gráficamente el cociente $\dfrac{6}{2 + 2i}$.

2.4. Indica una construcción gráfica del complejo $\dfrac{1}{z}$

1 Regla de L'Hôpital

Unidad 5

La Regla de L'Hôpital permite calcular ciertos tipos de límites de funciones de una manera rápida, mediante la consideración de ciertas funciones derivadas.

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, entonces se dice que el $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ es una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$; la regla de L'Hôpital permite muchas veces deshacer esta indeterminación.

1.1. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en $]a, b[$ y si $x_0 \in]a, b[$ y $g'(x) \neq 0$ para $x \neq x_0$ y existe el límite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si el segundo límite puede calcularse, la indeterminación queda resuelta; si obtenemos una nueva indeterminación y las funciones f' y g' están de nuevo en las condiciones del enunciado se puede reiterar la Regla.

1.2. Calculemos: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$; en este caso, $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = x$; f y g son derivables en $\mathbb{R}$ y $g'(x) \neq 0$ si $x \neq 0$; por tanto, aplicando la Regla de L'Hôpital se tiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

1.3. Consideremos ahora el siguiente límite: $\lim_{x \to 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$. Se trata de una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.

Aplicando la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-\pi \operatorname{sen} \pi x}{2x - 2}$$

Esta última expresión es una nueva forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$; volviendo a aplicar la Regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-\pi \operatorname{sen} \pi x}{2x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{-\pi^2 \cos \pi x}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

2 La forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$

2.1. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, entonces se dice que el $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ es una forma indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$; en este caso, se verifica también la Regla de L'Hôpital, es decir:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nota: La Regla de L'Hôpital sigue siendo válida para los límites del tipo $x \to \infty$.

2.2. El $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x}$ es una forma indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$; aplicando la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

2.3. Análogamente, podemos calcular $\lim \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 - 1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5 - 1}{x^3 + x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{3x^2 + 2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{20x^3}{6x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{60x^2}{6} = \infty$$

3 La forma indeterminada $0 \cdot \infty$

3.1. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, se dice que el $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x)$ es una forma indeterminada del tipo $0 \cdot \infty$; en este caso, la expresión $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ se puede escribir como $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, o $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, que es una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right.$, respectivamente $\left.\right)$ a la que se puede aplicar la Regla de L'Hôpital.

3.2. El límite $\lim_{x\to 0} x^2 Lx$ es la forma indeterminada $0 \cdot \infty$; en este caso se tiene:

$\lim_{x\to 0} x^2 Lx = \lim_{x\to 0} \frac{Lx}{\frac{1}{x^2}}$, que es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} x^2 Lx = \lim_{x\to 0} \frac{Lx}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

3.3. Análogamente:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}}=-1$$

3.4. Calcula los siguientes límites: $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-e^x}{x}$, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} 2x}{2\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$, $\lim_{x\to 1}\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{\frac{1}{x-1}}$

1 Movimiento uniformemente acelerado

Unidad 6

1.1. Sea $x = x(t)$ una función que representa el espacio recorrido por una partícula en función del tiempo. Se definen la velocidad y la aceleración instantáneas de la partícula por $v=\dfrac{dx}{dt}$ y $a=\dfrac{dv}{dt}$, respectivamente. Observa que v y a son, en general, funciones del tiempo.

Deduciremos, mediante el cálculo integral, expresiones para la velocidad y espacio recorrido por una partícula para el caso en el que la aceleración es constante. Este es el llamado *movimiento uniformemente acelerado.*

1.2. *Sea un movimiento en el que la aceleración es constante*

Como $a=\dfrac{dv}{dt}$, resulta que la velocidad es una primitiva de la aceleración. Así: $v=\int a\,dt = a\int dt = at + C$.

Aunque la constante C es arbitraria, podemos interpretarla como la velocidad correspondiente al instante $t = 0$, velocidad inicial, ya que: $v(0) = C$.

Pondremos $C = v_0$. La expresión anterior nos queda: $v = v_0 + at$, que es la fórmula de la velocidad de una partícula con aceleración constante. Observa que existe una relación lineal entre v y t.

1.3. De la definición de velocidad: $v=\dfrac{dx}{dt}$ se obtiene que el espacio recorrido por una partícula es una primitiva de la función velocidad. Así: $x = \int v dt$.

Sustituyendo en esta fórmula el valor para la velocidad obtenido en **1.2.**:

$$x=\int(v_0+at)dt=\int v_0 dt+\int at dt=v_0t+\frac{1}{2}at^2+C$$

Como $C = x(0)$, podemos interpretarla como la posición de la partícula en el instante inicial. Pondremos $C = x_0$. Así nos queda: $x = x_0 + v_0t + \dfrac{1}{2}at^2$.

1.4. Un cuerpo se empieza a mover con una aceleración constante de 2 m/seg^2 ¿Qué tiempo invertirá en alcanzar una velocidad de 50 m/seg? ¿Qué espacio recorrerá hasta conseguir dicha velocidad?

$v = v_0 + at \Rightarrow 50 \text{ m/seg} = 0 + 2 \text{ m/seg}^2 \cdot t \Rightarrow t = 25 \text{ seg.}$

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} 2 \text{ m/seg}^2 \cdot 25^2 \text{ seg}^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 625 = 625 \text{ m.}$

1.5. Un móvil con una velocidad inicial de 10 m/seg sufre una deceleración constante de 5 m/seg^2. ¿Qué tiempo y espacio recorrerá hasta alcanzar el reposo?

1.6. Un objeto cae desde una cierta altura y llega al suelo con una velocidad de 200 m/seg. ¿Desde qué altura se produce la caída?

1 Cálculo abreviado de la media aritmética

Unidad 7

1.1. Consideremos una distribución de frecuencias cualquiera:

x_i	x_1	$x_1, x_2 \dots x_n$
f_i	f_1	$f_1, f_2 \dots f_n$

Se sabe que su media aritmética es $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}$, donde $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

Cuando el número de datos es elevado y los valores de la variable x son grandes, el cálculo de la media se hace muy laborioso. Describiremos un método con el cual los cálculos se simplifican enormemente. Este método se basa en la siguiente propiedad de la media aritmética.

1.2. Refiriéndonos a la distribución de frecuencias de **1.1.**, y si A es un número cualquiera, se verifica:

$$\bar{x} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N}$$

donde $d_i = x_i - A$, $i = 1 \dots n$ son desviaciones de los valores de la variable x respecto del número A. En efecto: si $d_i = x_i - A \Rightarrow x_i = A + d_i$, $\forall_i = i \dots n$.

Por tanto: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i (A + d_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \dfrac{A \sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N} = A + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N}$

Llamando $\overline{d} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N}$, podemos escribir: $\overline{x} = \overline{A} + \overline{d}$.

Para calcular la media aritmética de una distribución de frecuencias mediante esta propiedad, es conveniente tomar como valor de A uno cualquiera de los x_i.

1.3. En una clase de 40 alumnos se encontró la siguiente distribución de estaturas:

x_i(estaturas en cm)	160	163	165	169	170	172	173
f_i(número de alumnos)	5	4	10	7	8	4	2

Calculemos su media aritmética. Para ello hacemos $A = 169$.

	x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$f_i d_i$
	160	5	−9	−45
	163	4	−6	−24
	165	10	−4	−40
	169	7	0	0
	170	8	1	8
	172	4	3	12
	173	2	4	8
Σ		40		−81

$$\overline{x} = 169 + \frac{-81}{40} = 169 - \frac{81}{40} = 169 - 2'025 = 166'975 \text{ cm}$$

2 Cálculo abreviado de la desviación típica

2.1. Dada la distribución de frecuencias:

x_i	$x_1, x_2 \ldots x_n$
f_i	$f_1, f_2 \ldots f_n$

Se definen la varianza s^2 y la derivación típica s del modo siguiente:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{N}; \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^2}{N}}$$

Un método breve para calcular la varianza (o la desviación típica) es consecuencia de la siguiente propiedad de la varianza.

2.2. Si A es un número cualquiera y $d_i = x_i - A$ son las desviaciones de los valores de x_i respecto de A, se verifica:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N} \right)^2$$

En efecto: $d_i = x_i - A \Rightarrow x_i = A + d_i$

Teniendo en cuenta la propiedad deducida en **1**: $\bar{x} = A + \bar{d}$ se tiene:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i[(A + d_i) - (A + \bar{d})]^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(d_i - \bar{d})^2}{N} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(d_i^2 - 2d_i\bar{d} + \bar{d}^2)}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i^2}{N} - 2\bar{d} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N} + \frac{N\bar{d}^2}{N} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i^2}{N} - 2\bar{d}^2 + \bar{d}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i d_i}{N}\right)^2$$

Lo mismo que para el cálculo de x, para hallar s^2 y s tomaremos como valor de A uno cualquiera de los que toma la variable x en la distribución.

2.3. En la tabla **1.4.**, referente a estaturas de 40 alumnos, calcularemos su varianza y su desviación típica.

Ordenamos los cálculos de la siguiente forma:

	x_i	f_i	$d_i = x_i - A$	$f_i \cdot d_i$	d_i^2	$f_i d_i^2$
	160	5	−9	−45	81	405
	163	4	−6	−24	36	144
	165	10	−4	−40	16	160
	169	7	0	0	0	0
	170	8	1	8	1	8
	172	4	3	12	9	36
	173	2	4	8	16	32
Σ		40		−81		785

$$s^2 = \frac{785}{40} - \left(\frac{-81}{40}\right)^2 = \frac{785}{40} - \left(\frac{81}{40}\right)^2 = 19'625 - 4'101 = 15'524$$

$$s = \sqrt{15'524}$$

2.5. Dada la siguiente tabla, calcula $\bar{x}$, s^2, s.

x_i	8	9	12	23	24	25
f_i	18	30	15	21	40	10

2.6. La siguiente tabla muestra la distribución de los pesos (kg) en una clase de 50 alumnos. Calcula $\bar{x}$, s^2, s.

x_i(kg)	45	47	52	56	60	65
f_i(número de alumnos)	4	8	15	18	3	2

TABLAS

↓ SENOS NATURALES, 0°-45°									DIFERENCIAS TABULARES (Sumar)		
°	0′	10′	20′	30′	40′	50′		°	1 2 3	4 5 6	7 8 9
0	0000	0029	0058	0087	0116	0145	0175	89	3 6 9	12 14 17	20 23 26
1	0175	0204	0233	0262	0291	0320	0349	88	3 6 9	12 14 17	20 23 26
2	0349	0378	0407	0436	0465	0494	0523	87	3 6 9	12 14 17	20 23 26
3	0523	0552	0581	0610	0640	0669	0698	86	3 6 9	12 14 17	20 23 26
4	0698	0727	0756	0785	0814	0843	0872	85	3 6 9	12 14 17	20 23 26
5	0872	0901	0929	0958	0987	1016	1045	84	3 6 9	12 14 17	20 23 26
6	1045	1074	1103	1132	1161	1190	1219	83	3 6 9	12 14 17	20 23 26
7	1219	1248	1276	1305	1334	1363	1392	82	3 6 9	12 14 17	20 23 26
8	1392	1421	1449	1478	1507	1536	1564	81	3 6 9	12 14 17	20 23 26
9	1564	1593	1622	1650	1679	1708	1736	80	3 6 9	12 14 17	20 23 26
10	1736	1765	1794	1822	1851	1880	1908	79	3 6 9	12 14 17	20 23 26
11	1908	1937	1965	1994	2022	2051	2079	78	3 6 8	11 14 17	20 22 25
12	2079	2108	2136	2164	2193	2221	2250	77	3 6 8	11 14 17	20 22 25
13	2250	2278	2306	2334	2363	2391	2419	76	3 6 8	11 14 17	20 22 25
14	2419	2447	2476	2504	2532	2560	2588	75	3 6 8	11 14 17	20 22 25
15	2588	2616	2644	2672	2700	2728	2756	74	3 6 8	11 14 17	20 22 25
16	2756	2784	2812	2840	2868	2896	2924	73	3 6 8	11 14 17	20 22 25
17	2924	2952	2979	3007	3035	3062	3090	72	3 6 8	11 14 17	20 22 25
18	3090	3118	3145	3173	3201	3228	3256	71	3 6 8	11 14 17	20 22 25
19	3256	3283	3311	3338	3365	3393	3420	70	3 5 8	11 14 16	19 22 24
20	3420	3448	3475	3502	3529	3557	3584	69	3 5 8	11 14 16	19 22 24
21	3584	3611	3638	3665	3692	3719	3746	68	3 5 8	11 14 16	19 22 24
22	3746	3773	3800	3827	3854	3881	3907	67	3 5 8	11 14 16	19 22 24
23	3907	3934	3961	3987	4014	4041	4067	66	3 5 8	11 14 16	19 22 24
24	4067	4094	4120	4147	4173	4200	4226	65	3 5 8	11 14 16	19 22 24
25	4226	4253	4279	4305	4331	4358	4384	64	3 5 8	10 13 16	18 21 23
26	4384	4410	4436	4462	4488	4514	4540	63	3 5 8	10 13 16	18 21 23
27	4540	4566	4592	4617	4643	4669	4695	62	3 5 8	10 13 16	18 21 23
28	4695	4720	4746	4772	4797	4823	4848	61	3 5 8	10 13 16	18 21 23
29	4848	4874	4899	4924	4950	4975	5000	60	3 5 8	10 13 15	18 20 23
30	5000	5025	5050	5075	5100	5125	5150	59	3 5 8	10 13 15	18 20 23
31	5150	5175	5200	5225	5250	5275	5299	58	3 5 8	10 13 15	18 20 23
32	5299	5324	5348	5373	5398	5422	5446	57	3 5 8	10 13 15	18 20 23
33	5446	5471	5495	5519	5544	5568	5592	56	3 5 7	10 12 14	17 19 22
34	5592	5616	5640	5664	5688	5712	5736	55	3 5 7	10 12 14	17 19 22
35	5736	5760	5783	5807	5831	5854	5878	54	2 5 7	10 12 14	17 19 22
36	5878	5901	5925	5948	5972	5995	6018	53	2 5 7	9 12 14	16 18 21
37	6018	6041	6065	6088	6111	6134	6157	52	2 5 7	9 12 14	16 18 21
38	6157	6180	6202	6225	6248	6271	6293	51	2 5 7	9 12 14	16 18 21
39	6293	6316	6338	6361	6383	6406	6428	50	2 4 7	9 11 13	15 18 20
40	6428	6450	6472	6494	6517	6539	6561	49	2 4 7	9 11 13	15 18 20
41	6561	6583	6604	6626	6648	6670	6691	48	2 4 7	9 11 13	15 18 20
42	6691	6713	6734	6756	6777	6799	6820	47	2 4 6	8 11 13	15 17 19
43	6820	6841	6862	6884	6905	6926	6947	46	2 4 6	8 11 13	15 17 19
44	6947	6967	6988	7009	7030	7050	7071	45	2 4 6	8 11 13	15 17 19
°		50′	40′	30′	20′	10′	0′	°	1 2 3	4 5 6	7 8 9
COSENOS NATURALES, 45°-90° →									DIFERENCIAS TABULARES (Restar)		

↓ SENOS NATURALES, 45°-90°									DIFERENCIAS TABULARES (Sumar)		
°	0′	10′	20′	30′	40′	50′		°	1 2 3	4 5 6	7 8 9
45	7071	7092	7112	7133	7153	7173	7193	44	2 4 6	8 10 12	14 16 18
46	7193	7214	7234	7254	7274	7294	7314	43	2 4 6	8 10 12	14 16 18
47	7314	7333	7353	7373	7392	7412	7431	42	2 4 6	8 10 12	14 15 18
48	7431	7451	7470	7490	7509	7528	7547	41	2 4 6	8 10 11	13 15 17
49	7547	7566	7585	7604	7623	7642	7660	40	2 4 6	8 9 11	13 15 17
50	7660	7679	7698	7716	7735	7753	7771	39	2 4 6	7 9 11	13 15 17
51	7771	7790	7808	7826	7844	7862	7880	38	2 4 5	7 9 11	13 15 16
52	7880	7898	7916	7934	7951	7969	7986	37	2 3 5	7 9 10	12 14 16
53	7986	8004	8021	8039	8056	8073	8090	36	2 3 5	7 9 10	12 14 16
54	8090	8107	8124	8141	8158	8175	8192	35	2 3 5	7 8 10	12 14 15
55	8192	8208	8225	8241	8258	8274	8290	34	2 3 5	7 8 10	11 13 15
56	8290	8307	8323	8339	8355	8371	8387	33	2 3 5	6 8 10	11 13 15
57	8387	8403	8418	8434	8450	8465	8480	32	2 3 5	6 8 9	11 12 14
58	8480	8496	8511	8526	8542	8557	8572	31	2 3 5	6 8 9	11 12 14
59	8572	8587	8601	8616	8631	8646	8660	30	1 3 4	6 7 9	10 12 13
60	8660	8675	8689	8704	8718	8732	8746	29	1 3 4	6 7 9	10 11 13
61	8746	8760	8774	8788	8802	8816	8829	28	1 3 4	6 7 8	10 11 12
62	8829	8843	8857	8870	8884	8897	8910	27	1 3 4	5 7 8	9 11 12
63	8910	8923	8936	8949	8962	8975	8988	26	1 3 4	5 6 8	9 10 12
64	8988	9001	9013	9026	9038	9051	9063	25	1 3 4	5 6 7	9 10 11
65	9063	9075	9088	9100	9112	9124	9135	24	1 2 4	5 6 7	9 10 11
66	9135	9147	9159	9171	9182	9194	9205	23	1 2 4	5 6 7	8 9 11
67	9205	9216	9228	9239	9250	9261	9272	22	1 2 3	4 6 7	8 9 10
68	9272	9283	9293	9304	9315	9325	9336	21	1 2 3	4 5 6	7 9 10
69	9336	9346	9356	9367	9377	9387	9397	20	1 2 3	4 5 6	7 8 9
70	9397	9407	9417	9426	9436	9446	9455	19	1 2 3	4 5 6	7 8 9
71	9455	9465	9474	9483	9492	9502	9511	18	1 2 3	4 5 6	7 7 8
72	9511	9520	9528	9537	9546	9555	9563	17	1 2 3	3 4 5	6 7 8
73	9563	9572	9580	9588	9596	9605	9613	16	1 2 2	3 4 5	6 7 7
74	9613	9621	9628	9636	9644	9652	9659	15	1 2 2	3 4 5	5 6 7
75	9659	9667	9674	9681	9689	9696	9703	14	1 1 2	3 4 4	5 6 7
76	9703	9710	9717	9724	9730	9737	9744	13	1 1 2	3 4 4	5 6 6
77	9744	9750	9757	9763	9769	9775	9781	12	1 1 2	3 3 4	4 5 6
78	9781	9787	9793	9799	9805	9811	9816	11	1 1 2	2 3 4	4 5 5
79	9816	9822	9827	9833	9838	9843	9848	10	1 1 2	2 3 3	4 4 5
80	9848	9853	9858	9863	9868	9872	9877	9	0 1 1	2 2 3	3 4 4
81	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	8	0 1 1	2 2 3	3 4 4
82	9903	9907	9911	9914	9918	9922	9925	7	0 1 1	1 2 2	3 3 3
83	9925	9929	9932	9936	9939	9942	9945	6	0 1 1	1 2 2	2 3 3
84	9945	9948	9951	9954	9957	9959	9962	5	0 1 1	1 1 2	2 2 3
85	9962	9964	9967	9969	9971	9974	9976	4	0 1 1	1 1 2	2 2 2
86	9976	9978	9980	9981	9983	9985	9986	3	0 0 1	1 1 1	2 2 2
87	9986	9988	9989	9990	9992	9993	9994	2	0 0 1	1 1 1	1 1 2
88	9994	9995	9996	9997	9997	9998	9998	1	0 0 0	0 0 1	1 1 1
89	9998	9999	9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0	0 0 0	0 0 1	1 1 1
°		50′	40′	30′	20′	10′	0′	°	1 2 3	4 5 6	7 8 9
COSENOS NATURALES, 0°-45° →									DIFERENCIAS TABULARES (Restar)		

↓ TANGENTES NATURALES, 0°-45°									DIFERENCIAS TABULARES (SUMAR)		
°	0′	10′	20′	30′	40′	50′		°	1 2 3	4 5 6	7 8 9
0	0000	0029	0058	0087	0116	0145	0175	89	3 6 9	12 15 17	20 23 26
1	0175	0204	0233	0262	0291	0320	0349	88	3 6 9	12 15 17	20 23 26
2	0349	0378	0407	0437	0466	0495	0524	87	3 6 9	12 15 17	20 23 26
3	0524	0553	0582	0612	0641	0670	0699	86	3 6 9	12 15 17	20 23 26
4	0699	0729	0758	0787	0816	0846	0875	85	3 6 9	12 15 18	21 24 26
5	0875	0904	0934	0963	0992	1022	1051	84	3 6 9	12 15 18	21 24 26
6	1051	1080	1110	1139	1169	1198	1228	83	3 6 9	12 15 18	21 24 27
7	1228	1257	1287	1317	1346	1376	1405	82	3 6 9	12 15 18	21 24 27
8	1405	1435	1465	1495	1524	1554	1584	81	3 6 9	12 15 18	21 24 27
9	1584	1614	1644	1673	1703	1733	1763	80	3 6 9	12 15 18	21 24 27
10	1763	1793	1823	1853	1883	1914	1944	79	3 6 9	12 15 18	21 24 27
11	1944	1974	2004	2035	2065	2095	2126	78	3 6 9	12 15 18	21 24 27
12	2126	2156	2186	2217	2247	2278	2309	77	3 6 9	12 15 18	22 25 28
13	2309	2339	2370	2401	2432	2462	2493	76	3 6 9	12 15 18	22 25 28
14	2493	2524	2555	2586	2617	2648	2679	75	3 6 9	12 16 19	22 25 28
15	2679	2711	2742	2773	2805	2836	2867	74	3 6 9	12 16 19	22 25 28
16	2867	2899	2931	2962	2994	3026	3057	73	3 6 10	13 16 19	22 26 29
17	3057	3089	3121	3153	3185	3217	3249	72	3 6 10	13 16 19	22 26 29
18	3249	3281	3314	3346	3378	3411	3443	71	3 6 10	13 16 19	23 26 29
19	3443	3476	3508	3541	3574	3607	3640	70	3 7 10	13 16 20	23 26 30
20	3640	3673	3706	3739	3772	3805	3839	69	3 7 10	13 17 20	23 26 30
21	3839	3872	3906	3939	3973	4006	4040	68	3 7 10	13 17 20	23 27 30
22	4040	4074	4108	4142	4176	4210	4245	67	3 7 10	14 17 21	24 27 31
23	4245	4279	4314	4348	4383	4417	4452	66	3 7 10	14 17 21	24 28 31
24	4452	4487	4522	4557	4592	4628	4663	65	4 7 11	14 18 21	25 28 32
25	4663	4699	4734	4770	4806	4841	4877	64	4 7 11	14 18 21	25 29 32
26	4877	4913	4950	4986	5022	5059	5095	63	4 7 11	15 18 22	25 29 33
27	5095	5132	5169	5206	5243	5280	5317	62	4 7 11	15 19 22	26 30 33
28	5317	5354	5392	5430	5467	5505	5543	61	4 8 11	15 19 23	26 30 34
29	5543	5581	5619	5658	5696	5735	5774	60	4 8 12	15 19 23	27 31 35
30	5774	5812	5851	5890	5930	5969	6009	59	4 8 12	16 20 23	27 31 35
31	6009	6048	6088	6128	6168	6208	6249	58	4 8 12	16 20 24	28 32 36
32	6249	6289	6330	6371	6412	6453	6494	57	4 8 12	16 20 24	28 33 37
33	6494	6536	6577	6619	6661	6703	6745	56	4 8 13	17 21 25	29 34 38
34	6745	6787	6830	6873	6916	6959	7002	55	4 9 13	17 21 26	30 34 39
35	7002	7046	7089	7133	7177	7221	7265	54	4 9 13	18 22 26	31 35 40
36	7265	7310	7355	7400	7445	7490	7536	53	5 9 14	18 23 27	32 36 41
37	7536	7581	7627	7673	7720	7766	7813	52	5 9 14	18 23 28	32 37 42
38	7813	7860	7907	7954	8002	8050	8098	51	5 10 14	19 24 29	33 38 43
39	8098	8146	8195	8243	8292	8342	8391	50	5 10 15	20 24 29	34 39 44
40	8391	8441	8491	8541	8591	8642	8693	49	5 10 15	20 25 30	35 40 45
41	8693	8744	8796	8847	8899	8952	9004	48	5 10 16	21 26 31	36 42 47
42	9004	9057	9110	9163	9217	9271	9325	47	5 11 16	21 27 32	37 43 48
43	9325	9380	9435	9490	9545	9601	9657	46	6 11 17	22 28 33	39 44 50
44	9657	9713	9770	9827	9884	9942	1,0000	45	6 11 17	23 29 34	40 46 51
°		50′	40′	30′	20′	10′	0′	°	1 2 3	4 5 6	7 8 9
COTANGENTES NATURALES, 45°-90° ↑									DIFERENCIAS TABULARES (Restar)		

TANGENTES NATURALES, 45°-90°

°	0′	10′		20′		30′		40′		50′				°
		Dif.		Dif.		Dif.		Dif.		Dif.				
45	1,0000	58	0058	59	0117	59	0176	59	0235	60	0295	60	0355	**44**
46	0355	61	0416	61	0477	61	0538	61	0599	62	0661	62	0723	**43**
47	0723	63	0786	64	0850	63	0913	64	0977	64	1041	65	1106	**42**
48	1106	65	1171	66	1237	66	1303	66	1369	67	1436	68	1504	**41**
49	1504	68	1572	68	1640	69	1709	69	1778	69	1847	71	1918	**40**
50	1,1918	70	1988	71	2059	72	2131	72	2203	73	1276	73	2349	**39**
51	2349	74	2423	74	2497	75	2572	75	2647	76	2723	76	2799	**38**
52	2799	77	2876	78	2954	78	3032	79	3111	79	3190	80	3270	**37**
53	3270	81	3351	81	3432	82	3514	83	3597	83	3680	84	3764	**36**
54	3764	84	3848	85	3933	86	4019	87	4106	87	4193	88	4281	**35**
55	1,4281	89	4370	90	4460	90	4550	91	4641	92	4733	93	4826	**34**
56	4826	93	4919	94	5013	95	5108	96	5204	97	5301	98	5399	**33**
57	5399	98	5497	100	5597	100	5697	101	5798	102	5900	103	6003	**32**
58	6003	104	6107	105	6212	107	6319	107	6426	108	6534	109	6643	**31**
59	6643	110	6753	111	6864	113	6977	113	7090	115	7205	116	7321	**30**
60	1,7321	116	7437	119	7556	119	7675	121	7796	121	7917	123	8040	**29**
61	8040	125	8165	126	8291	127	8418	128	8546	130	8676	131	8807	**28**
62	8807	133	8940	134	9074	136	9210	137	9347	139	9486	140	9626	**27**
63	9626	142	9768	144	9912	145	* 0057	147	* 0204	149	* 0353	150	* 0503	**26**
64	2,0503	152	0655	154	0809	156	0965	158	1123	160	1283	162	1445	**25**
65	2,1445	164	1609	166	1775	168	1943	170	2113	173	2286	174	2460	**24**
66	2460	177	2637	180	2817	181	2998	185	3183	186	3369	190	3559	**23**
67	3559	191	3750	195	3945	197	4142	200	4342	203	4545	206	4751	**22**
68	4751	209	4960	212	5172	214	5386	219	5605	221	5826	225	6051	**21**
69	6051	228	6279	232	6511	235	6746	239	6985	243	7228	247	7475	**20**
70	2,7475	250	7725	255	7980	259	8239	263	8502	268	8770	272	9042	**19**
71	9042	277	9319	281	9600	287	9887	291	* 0178	297	* 0475	302	* 0777	**18**
72	3,0777	307	1084	313	1397	319	1716	325	2041	330	2371	338	2709	**17**
73	2709	343	3052	350	3402	357	3759	365	4124	371	4495	379	4874	**16**
74	4874	387	5261	395	5656	403	6059	411	6470	421	6891	430	7321	**15**
75	3,7321	439	7760	448	8208	459	8667	469	9136	481	9617	491	* 0108	**14**
76	4,0108	503	0611	515	1126	527	1653	540	2193	554	2747	568	3315	**13**
77	3315	582	3897	597	4494	613	5107	629	5736	646	6382	664	7046	**12**
78	7046	683	7729	701	8430	722	9152	742	9894	764	* 0658	788	* 1446	**11**
79	5,1446	811	2257	836	3093	862	3955	890	4845	919	5764	949	6713	**10**
80	5,6713		5,7694		5,8708		5,9758		6,0844		6,1970		6,3138	**9**
81	6,3138		6,4348		6,5606		6,6912		6,8269		6,9682		7,1154	**8**
82	7,1154		7,2687		7,4287		7,5958		7,7704		7,9530		8,1443	**7**
83	8,1443		8,3450		8,5555		8,7769		9,0098		9,2553		9,5144	**6**
84	9,5144		9,7882		10,078		10,385		10,712		11,059		11,430	**5**
85	11,430		11,826		12,251		12,706		13,197		13,727		14,301	**4**
86	14,301		14,924		15,605		16,350		17,169		18,075		19,081	**3**
87	19,081		20,206		21,470		22,904		24,542		26,432		28,636	**2**
88	28,636		31,242		34,368		38,188		42,964		49,104		57,290	**1**
89	57,290		68,750		85,940		114,59		171,89		343,77		∞	**0**
°		**50′**		**40′**		**30′**		**20′**		**10′**		**0′**		°

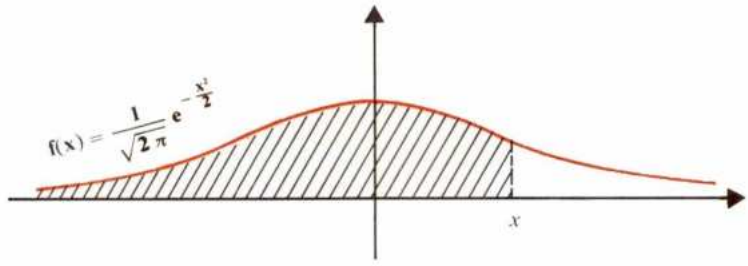
COTANGENTES NATURALES, 0°-45′ ↑

* La parte entera de los decimales que llevan asterisco es la correspondiente a los de la línea inmediata inferior.

DISTRIBUCION BINOMIAL

n *i*	*p*									
	0'05	0'10	0'15	0'20	0'25	0'30	0'35	0'40	0'45	0'50
1 0	0'9500	0'9000	0'8500	0'8000	0'7500	0'7000	0'6500	0'6000	0'5500	0'5000
1	0'0500	0'1000	0'1500	0'2000	0'2500	0'3000	0'3500	0'4000	0'4500	0'5000
2 0	0'9025	0'7100	0'7225	0'6400	0'5625	0'4900	0'4225	0'3600	0'3025	0'2500
1	0'0950	0'1800	0'2550	0'3200	0'3750	0'4200	0'4550	0'4800	0'4950	0'5000
2	0'0025	0'0100	0'0225	0'0400	0'0625	0'0900	0'1225	0'1600	0'2025	0'2500
3 0	0'8574	0'7290	0'6141	0'5120	0'4219	0'3430	0'2746	0'2160	0'1664	0'1250
1	0'1354	0'2430	0'3251	0'3840	0'4219	0'4410	0'4436	0'4320	0'4084	0'3750
2	0'0071	0'0270	0'0574	0'0960	0'1406	0'1890	0'2389	0'2880	0'3341	0'3750
3	0'0001	0'0010	0'0034	0'0080	0'0156	0'0270	0'0429	0'0640	0'0911	0'1250
4 0	0'8145	0'6561	0'5220	0'4096	0'3164	0'2401	0'1785	0'1296	0'0915	0'0625
1	0'1715	0'2916	0'3685	0'4096	0'4219	0'4116	0'3845	0'3456	0'2995	0'2500
2	0'0135	0'0486	0'0975	0'1536	0'2109	0'2646	0'3105	0'3456	0'3675	0'3750
3	0'0005	0'0036	0'0115	0'0256	0'0469	0'0756	0'1115	0'1536	0'2005	0'2500
4	0'0000	0'0001	0'0005	0'0016	0'0039	0'0081	0'0150	0'0256	0'0410	0'0625
5 0	0'7738	0'5905	0'4437	**0'3277**	0'2373	0'1681	0'1160	0'0778	0'0503	0'0312
1	0'2036	0'3280	0'3915	**0'4096**	0'3955	0'3602	0'3124	0'2592	0'2059	0'1562
2	0'0214	0'0729	0'1382	**0'2048**	0'2637	0'3087	0'3364	0'3456	0'3369	0'3125
3	0'0011	0'0071	0'0244	**0'0512**	0'0879	0'1323	0'1811	0'2304	0'2757	0'3125
4	0'0000	0'0004	0'0022	0'0064	0'0146	0'0284	0'0488	0'0768	0'1128	0'1562
5	0'0000	0'0000	0'0001	0'0003	0'0010	0'0024	0'0053	0'0102	0'0185	0'0312
6 0	0'7351	0'5314	0'3771	0'2621	0'1780	0'1176	0'0754	0'0467	0'0277	0'0156
1	0'2321	0'3543	0'3993	0'3932	0'3560	0'3025	0'2437	0'1868	0'1359	0'0938
2	0'0305	0'0984	0'1762	0'2458	0'2966	0'3241	0'3280	0'3110	0'2780	0'2344
3	0'0021	0'0146	0'0415	0'0819	0'1318	0'1852	0'2355	0'2765	0'3032	0'3125
4	0'0001	0'0012	0'0055	0'0154	0'0330	0'0595	0'0951	0'1382	0'1861	0'2344
5	0'0000	0'0001	0'0004	0'0015	0'0044	0'0102	0'0205	0'0369	0'0609	0'0938
6	0'0000	0'0000	0'0000	0'0001	0'0002	0'0007	0'0018	0'0041	0'0083	0'0156
7 0	0'6983	0'4783	0'3206	0'2097	0'1335	0'0824	0'0490	0'0280	0'0152	0'0078
1	0'2573	0'3720	0'3960	0'3670	0'3115	0'2471	0'1848	0'1306	0'0072	0'0547
2	0'0406	0'1240	0'2097	0'2753	0'3115	0'3177	0'2985	0'2613	0'2140	0'1641
3	0'0036	0'0230	0'0617	0'1147	0'1730	0'2269	0'2679	0'2903	0'2918	0'2734
4	0'0002	0'0026	0'0109	0'0287	0'0577	0'0972	0'1442	0'1935	0'2388	0'2734
5	0'0000	0'0002	0'0012	0'0043	0'0115	0'0250	0'0466	0'0774	0'1172	0'1641
6	0'0000	0'0000	0'0001	0'0004	0'0013	0'0036	0'0084	0'0172	0'0320	0'0547
7	0'0000	0'0000	0'0000	0'0001	0'0001	0'0002	0'0006	0'0016	0'0037	0'0078
8 0	0'6634	0'4305	0'2725	0'1678	0'1002	0'0576	0'0319	0'0168	0'0084	0'0039
1	0'2793	0'3826	0'3847	0'3355	0'2670	0'1977	0'1373	0'0896	0'0548	0'0312
2	0'0515	0'1488	0'2376	0'2936	0'3115	0'2065	0'2587	0'2090	0'1569	0'1094
3	0'0054	0'0331	0'0839	0'1468	0'2076	0'2541	0'2786	0'2787	0'2568	0'2188
4	0'0004	0'0046	0'0185	0'0459	0'0865	0'1361	0'1875	0'2322	0'2627	0'2734
5	0'0000	0'0004	0'0026	0'0092	0'0231	0'0467	0'0808	0'1239	0'1719	0'2188
6	0'0000	0'0000	0'0002	0'0011	0'0038	0'0100	0'0217	0'0413	0'0403	0'1094
7	0'0000	0'0000	0'0000	0'0001	0'0004	0'0012	0'0033	0'0079	0'0164	0'0312
8	0'0000	0'0000	0'0000	0'0000	0'0000	0'0001	0'0002	0'0007	0'0017	0'0039

TABLA DE DISTRIBUCION NORMAL



$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

x	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998

x	1'282	1'645	1'960	2'326	2'576	3'090	3'291	3'891	4'417
$F_1(x)$	0'90	0'95	0'975	0'99	0'995	0'999	0'9995	0'99995	0'999995
$2[1 - F_1(x)]$	0'20	0'10	0'05	0'02	0'01	0'002	0'001	0'0001	0'00001

© 1977 by SANTILLANA, S.A.
Elfo, 32 - Madrid-27.
PRINTED IN SPAIN
Impreso en España en los
Talleres Gráficos Mateu Cromo, S. A.
Carretera de Pinto a Fuenlabrada, s/n Pinto (Madrid)
ISBN: 84-294-1414-2
Depósito Legal: M. 19.939-1979

Texto aprobado por el Ministerio de Educación y Ciencia en O. M. de 11.5.77.

textos **santillana** para el Bachillerato

1

- Ciencias Naturales
- Dibujo
- Francés
- Historia de las Civilizaciones y del Arte
- Inglés
- Lengua Española y Literatura
- Matemática
- Religión

2

- Física y Química
- Francés
- Geografía humana y económica
- Inglés
- Lengua Española y Literatura
- Lengua Latina y Civilización romana
- Matemática
- Religión
- Dibujo Técnico
- Diseño Artístico

3

- Filosofía
- Francés
- Geografía e Historia de España y de los Países Hispánicos
- Inglés
- Dibujo Técnico
- Diseño Artístico
- Ciencias Naturales
- Física y Química
- Lengua Española y Literatura
- Lengua y Civilización Griegas
- Lengua y Literatura Latinas
- Matemática
- Religión